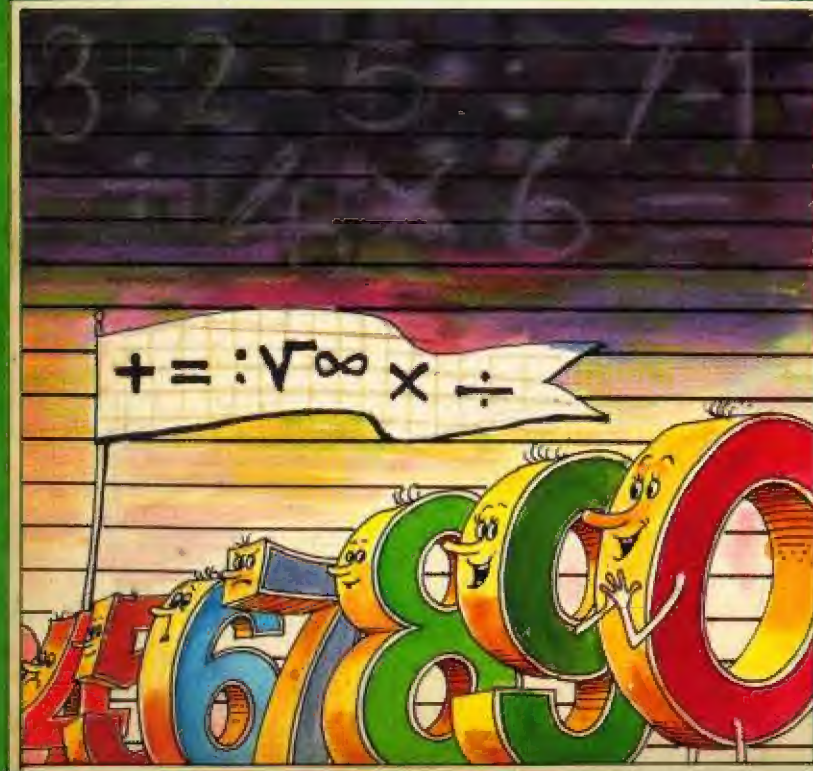


కౌలెండరుతో అంకెలసరదా

పి.కె. శ్రీనివాసన్



కాలెండరుతో అంకెల సరదా

(11-14 సంవత్సరాల పిల్లలకు)

పి. కె. శ్రీనివాసన్

తెలుగు

అనురాధ సంపత్ కుమార్



బాలసాహితి

ప్రచురణ సంఖ్య : 3

ప్రతులు : 1000

వెల : 10/-

మొదటి ముద్రణ : మార్చి 1990

Translation to
'NUMBER FUN WITH A CALENDAR'

© P. K. SRINIVASAN, 1988
Alarsri, Door No 20, Street No 25,
T. G. Nagar, Madras 600 061.

All Rights Reserved.

No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photo copying, recording or by any information storage and retrieval system without prior written permission of the author. Translation, video taping and televising right also reserved.

కవర్ డిజైన్ : గంగాధర్

వివరాలకు :

బాలసాహితి

2-1-1/5, నల్లకుండు, ప్రాదరాబాద్-500 044.

ముద్రణ : ప్రాదరాబాదు ప్రింటర్స్, హబ్బిగూడ, ప్రాదరాబాదు

కాలెండరు 1990

జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్
<p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3 4 5 6</p> <p>7 8 9 10 11 12 13</p> <p>14 15 16 17 18 19 20</p> <p>21 22 23 24 25 26 27</p> <p>28 29 30 31</p>	<p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3</p> <p>4 5 6 7 8 9 10</p> <p>11 12 13 14 15 16 17</p> <p>18 19 20 21 22 23 24</p> <p>25 26 27 28</p>	<p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3</p> <p>4 5 6 7 8 9 10</p> <p>11 12 13 14 15 16 17</p> <p>18 19 20 21 22 23 24</p> <p>25 26 27 28 29 30 31</p>	<p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3 4 5 6 7</p> <p>8 9 10 11 12 13 14</p> <p>15 16 17 18 19 20 21</p> <p>22 23 24 25 26 27 28</p> <p>29 30</p>
<p>మే</p> <p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3 4 5</p> <p>6 7 8 9 10 11 12</p> <p>13 14 15 16 17 18 19</p> <p>20 21 22 23 24 25 26</p> <p>27 28 29 30 31</p>	<p>జూన్</p> <p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2</p> <p>3 4 5 6 7 8 9</p> <p>10 11 12 13 14 15 16</p> <p>17 18 19 20 21 22 23</p> <p>24 25 26 27 28 29 30</p>	<p>జూలై</p> <p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3 4 5 6 7</p> <p>8 9 10 11 12 13 14</p> <p>15 16 17 18 19 20 21</p> <p>22 23 24 25 26 27 28</p> <p>29 30 31</p>	<p>ఆగష్టు</p> <p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3 4</p> <p>5 6 7 8 9 10 11</p> <p>12 13 14 15 16 17 18</p> <p>19 20 21 22 23 24 25</p> <p>26 27 28 29 30 31</p>
<p>సెప్టెంబరు</p> <p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1</p> <p>2 3 4 5 6 7 8</p> <p>9 10 11 12 13 14 15</p> <p>16 17 18 19 20 21 22</p> <p>23 24 25 26 27 28 29</p>	<p>అక్టోబరు</p> <p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3 4 5 6</p> <p>7 8 9 10 11 12 13</p> <p>14 15 16 17 18 19 20</p> <p>21 22 23 24 25 26 27</p> <p>28 29 30 31</p>	<p>నవంబరు</p> <p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>1 2 3</p> <p>4 5 6 7 8 9 10</p> <p>11 12 13 14 15 16 17</p> <p>18 19 20 21 22 23 24</p> <p>25 26 27 28 29 30</p>	<p>డిసెంబరు</p> <p>ఆ. సో. మ. బు. గు. శు. శ.</p> <p>30 31</p> <p>2 3 4 5 6 7 8</p> <p>9 10 11 12 13 14 15</p> <p>16 17 18 19 20 21 22</p> <p>23 24 25 26 27 28 29</p>

విషయ సూచిక

1. మాలో కలవండి	1
2. క్షణంలోనే సగటు - కూడకుండా మొత్తం	3
3. తమాషా దీర్ఘ చతురస్రాలు	10
4. అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రాలు	13
5. కూడిక గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు	19
6. నక్షత్రపు గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు	23
7. పూర్తి తమాషా చతురస్రాలు	27
8. నిలువు వరుసల మొత్తం ఆట	48
9. వారం, తేదీ	55
10. కొన్ని గణితరూపాలు	65
11. పారిభాషిక పదజాలం	81

రచయిత పరిచయం

శ్రీ పి.కె. శ్రీనివాసన్ 1924 నవంబర్ 4న మద్రాసులో పుట్టారు. ఆయన చదువంతా మద్రాస్ లోనే కొనసాగింది. 1947లో మద్రాసు విశ్వవిద్యాలయం నుండి గణిత శాస్త్రంలో పట్టాపొందారు. 1948 లో బాచిలర్ ఆఫ్ డివింగ్ పట్టాపొందారు. వెనువెంటనే ఉపాధ్యాయునిగా ఉద్యోగం పొంది నాలుగేళ్ళ పాటు కోయంబత్తూరులోని గ్రామీణ ఉన్నత పాఠశాలలో గణితం బోధించారు. 1952 నుండి 1975 వరకు మద్రాసులోని ముత్తియర్ పెట్ ఉన్నత పాఠశాలలో పనిచేశారు. 1959 లో ఎం.ఇ.డి. చేశారు. ముత్తియర్ పెట్ లో పనిచేస్తున్నప్పుడు ఒక సంవత్సరం అమెరికాలోనూ, రెండు సంవత్సరాలు, న్యూఢిల్లీలోని ఎన్.సి.ఇ.ఆర్.టి లోను పనిచేశారు. 1976-79 మధ్య నైజీరియాలో సీనియర్ పెడరల్ ఎడ్యుకేషన్ ఆఫీసరుగా, 1979-81 మధ్య ఫేడ్ ఎడ్యుకేషన్ కళాశాలలో సీనియర్ లెక్చరర్ గా ఉన్నారు.

గణితంపట్ల ఆసక్తితో, పాఠశాలల మధ్య అనేక ఆటల పోటీలు ప్రారంభించారు. మాథమెటిక్స్ క్లబ్బులు మొదలుపెట్టారు. వీటిని ఇప్పటికీ ప్రభుత్వ సంస్థలు నిర్వహిస్తున్నాయి. అన్ని స్థాయిలలో గణిత ఉపాధ్యాయులకు పునశ్చరణ తరగతులు నిర్వహించారు. 1981లో పదవీ విరమణ చేసినప్పటి నుండి గణిత బోధనలో సంహారాలుగా ఉన్నారు.

1968లో రామానుజన్ గురించి ఎవ్వరూ ఎరగని విషయాలను తెలుపుతూ "రామానుజన్ మెమోరియల్ నంబర్స్" అన్న పుస్తకాన్ని రెండు భాగాలుగా ప్రచురించారు. శ్రీ శ్రీనివాసన్ ఇంగ్లీషు, తమిళ భాషల్లో ఎన్నో గణిత పాఠ్య పుస్తకాలూ, అమధంధ పుస్తకాలూ రాశారు. ఆయన గణితంపై రాసిన అనేక వ్యాసాలు గణిత శాస్త్ర సంబంధ పత్రికలలోనే కాక 'ది హిందూ', 'దిన వాణి' (తమిళం) దిన పత్రికలలో వెలువడ్డాయి.

'గణిత బోధన అంతర్జాతీయ సదస్సు'లో ఆయన పూర్తిస్థాయి సభ్యులు. 1972 నుండి నాలుగు సంవత్సరాలకు ఒకసారి జరిగే ఈ సంస్థ సమావేశాలకు ఇంగ్లండు, పశ్చిమ జర్మనీ, అమెరికా, ఆస్ట్రేలియా, హంగరీ దేశాలు వెళ్ళి వచ్చారు.

ఎనిమిది సంవత్సరాల వయస్సులోనే పిల్లలకి బీజగణితం పరిచయం చేయవచ్చని శ్రీ శ్రీనివాసన్ అభిప్రాయం. 1988 ఆగస్టులో డెన్మార్క్, స్వీడన్, నార్వే, ఫిన్లాండ్ దేశాలను సందర్శించి తన అభిప్రాయాన్ని ప్రతిపాదించి ఆచరణలోకి తీసుకు రాగలిగారు.

భారతదేశంలో “గణితబోధకుల సంఘ” స్థాపక సభ్యులు. ప్రస్తుతం దీనికి ఆకడమిక్ సెక్రటరీగా పనిచేస్తున్నారు. రామానుజం జన్మశతాబ్దికి గుర్తుగా ఈ సంస్థ వెలువరించిన పుస్తకం (Teachers instructional Guides on introduction to creativity, of Ramanujan) ఆయనే రాశారు. మద్రాసు లోని ‘రామానుజన్ ఇన్స్టిట్యూట్ ఆఫ్ అడ్వాన్స్డ్ స్టడీ ఇన్ మాథమెటిక్స్’లో యుజిసి. ఏర్పాటు చేసిన ‘పాఠశాల అభివృద్ధి కేంద్రం’లో సభ్యులుగా ఉన్నారు. ‘(Romping in number land’, ‘why Maths Club’, ‘Innovative Approaches in Mathematics Education’ అన్న జనరంజక గణిత పుస్తకాలను ప్రచురించారు.

ముందు మాట

కొత్త సంవత్సరం మొదలుకావటంతోనే, చిన్న పిల్లలనుండి వయస్సు మళ్ళిన వారి వరకు కొత్త కాలెండరు కోసం వేట మొదలవుతుంది. ఎక్కువ కాలెండర్లు ఉన్నవారిని చూసి మిగిలిన వారు అనూయ పడుతుంటారు.

ఇళ్ళలో, అంగళ్ళలో, బడుల్లో, ఆఫీసుల్లో కాలెండర్లు ఉంటాయి. ఏడు అడ్డ వరుసల్లో లేదా నిలువు వరుసల్లో ఉండే తారీకుల అమరిక అందరికీ పరిచయమే. కానీ వీటిలో ఇమిడి ఉన్న అద్భుత విషయాలు అంతగా తెలియవు.

కాలెండరులోని తారీకుల అమరికలోని అద్భుత విషయాలు పిల్లలకు పరిచయం చేసి గణితంలో అభిరుచిని పెంచటానికి ఈ పుస్తకం ఒక కొత్త మార్గం అవుతుంది. సాధారణంగా దొరికే వస్తువులలో అద్భుతమైన సంఖ్యల అమరికను చూడగలిగితే పిల్లలకు గణితంపట్ల ఆసక్తి పెరుగుతుంది. ఇష్టంగా లెక్కలు నేర్చుకోవడానికి దోహదం చేస్తుంది. పిల్లలను పసితనం నుంచే గణిత శాస్త్రం వైపుకు ఆకర్షించటానికి ఎంతో తోడ్పడుతుంది. కూడికలూ, హెచ్చవేతలూ వచ్చి ఉండే వాలు. కాలెండరులోని ఈ అంకెల సరదాలో పిల్లలు పాలు పంచుకోవచ్చు.

ఈ పుస్తకం వివిధ వయసుల (11-14 సంవత్సరాలు) వారికి అనుకూలంగా ఉంటుంది. వారి స్థాయిని బట్టి సిద్ధాంతాలను అవగాహన చేసుకోగలుగుతారు.

సంఖ్యావళి విధానం పిల్లలను తక్షణం ఆకట్టుకుంటుంది. వారి హిందూత్వ శక్తిని ప్రోత్సహిస్తుంది. అందుకే ఈ పద్ధతిని ఈ పుస్తకంలో అవలంబించాను. సాధారణంగా మనదేశంలో పఠనాభిరుచి ఉన్నా, చదవటానికి ఏమీ లేక తమ అభిరుచిని కోల్పోతుంటారు. నా అనుభవంలో పుస్తకంలో సంఖ్యావళి విధానం అభిరుచి ఉన్నవారిని కార్య పూరులుగానూ, కార్యపూరుల్ని నిపుణులు గానూ మలుస్తుంది. గణిత శాస్త్రంలో నైపుణ్యం ఉన్న పిల్లలు ఈ కంప్యూటర్ యుగంలో ఎంతయినా అవసరం.

వీడియో తీయటానికి, టీ.వీ లో ప్రసారానికి అనువుగా ఈ పుస్తకం రూపొందించాను. కాలెండరు ద్వారా ఆట రీతిలో గణితాన్ని ఆనందించటంలోని విశిష్టతను గణిత శాస్త్రంలో పరిచయమున్న ఎవరైనా ఇట్టే గ్రహిస్తారు. ఈ పుస్తకాన్ని తెలుగులోకి అనువాదం చేసిన నా కోడలు శ్రీమతి అనురాధ సంపత్ కుమార్ కు ధన్యవాదాలు.

మద్రాసు
జనవరి, 1990

పి.కె. శ్రీనివాసన్

1. మాతో కలవండి

నా పేరుమధు. 9 వ తరగతి చదువుతున్నాను. నా తమ్ముడు రవి 7 వ తరగతి, చెల్లి సుధ 5 వ తరగతి చదువుతున్నారు.

మా నాన్నగారు బట్టల వ్యాపారం చేస్తారు. ఆదివారాలు మాతో గడపడమంటే ఆయనకెంతో ఇష్టం. ఆయన ప్రతి వస్త్రపులోనూ గణితం చూస్తారు. దానివల్ల మాకు గ్లాసులు, బెల్లు, కాగితపు ముక్క, గళ్ళ కాగితం, రైలు టిక్కెట్లు వంటివాటితో సరదాగా లెక్కలుకడుతూ ఆడుకోవటం అరివాటు. ఈ ఆటల వల్ల మాకు గణితం పట్ల ఆసక్తి పెరిగింది.

మేము ఏ వస్త్రపు తీసుకువెళ్ళినా సరే దానితో ఆటలు కనిపెట్టి మమ్మల్ని ఆశ్చర్యచకితుల్ని చేసేవారు. ఏ ఆటలోనైనా సరే గణితం లేకుండా ఉండదన్న విషయం ఆయన వల్ల మాకు తెలిసింది.

సంక్రాంతి సెలవలు అడుతూ పాడుతూ గడుపుతున్నాం. కొత్త సంవత్సరం క్యాలెండర్లు (calendar) వచ్చాయి. కాలెండరుతో ఏవైనా ఆటలు సృష్టించగలరేమోనని "తేదీల అమరికలో ఏమైనా తమాషా వుందా?" అని అడిగాం. ఇక సెలవలన్నీ కాలెండర్ లోని తమాషా లెక్కలతో గడిచిపోయాయి.

నాన్న ఒకటి రెండు సూచనలిచ్చి అద్భుతమైన విషయాల్ని కనుక్కొండని మాకే వదిలి వేసేవారు.

కాలెండర్ తో సరదాగా ఆడుకుంటూ కనుగొన్న ఎన్నో విషయాలు మీ ముందుంచుతున్నాం. మాతో కలసి ఆ ఆనందాన్ని పంచుకోండి.

నాన్న మా పంకలు తీసుకు రమ్మన్నారు. సుధ పంక మీద కింది విధంగా అంకెలు వేశారు.

ఉదా : $1+1=2$, $2+1=3$; ఈ విధంగా కొనసాగుతుంది.

నాన్న: మరి నిలువు వరుసల్లో?

రవి : నిలువు వరుసల్లో అంకెలు 7 చొప్పున పెరుగుతాయి.

ఉదా : $1+7=8$, $8+7=15$

నాన్న: వికర్ణంలో?

మధు : వికర్ణంలో రెండు రకాల క్రమాలున్నాయి. ఎకమవక్క పై నుంచి కుడివక్క కిందకి ఉన్న వికర్ణంలో అంకెలు 8 చొప్పున ఎక్కువవుతాయి.

ఉదా: $1+8=9$, $9+8=17$

కుడివక్క పై నుండి ఎడమ వక్క కిందకి ఉన్న వికర్ణంలో సంఖ్యలు 6 చొప్పున ఎక్కువవుతాయి.

ఉదా: $1+6=7$, $7+6=13$

నాన్న: ఇలాంటి క్రమాలను సంకలన క్రమాలని (additive sequence) అనవచ్చు. ఈ క్రమాలలోని అంకెలకు ఒక సంఖ్యను కూడితే తరువాత అంకె వస్తుంది.

రవి : మొదటి నిలువు వరుసలోని అంకెల సగటు 15. నేను చెప్పింది కరెక్టేనా?

నాన్న: అవును. సరిగ్గా చెప్పావు. 17 సగటుగా గల రెండు క్రమాలున్నాయి. వాటిని చూపగలరా?

రవి :

3	10	17	24	31
5	11	17	23	29

సుధ : 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 అన్న క్రమానికి సగటు 17 కాదా?

మధు : 17 మధ్య సంఖ్య కాదు కాబట్టి అది ఈ క్రమం సగటుకాదు. నాన్నా! నేనొక ప్రశ్న అడగనా? ఒక క్రమంలోని అంకెలన్నీ కూడి ఎన్ని అంకెలున్నాయో దానితో భాగిస్తే వచ్చేది భాగఫలం (quotient) ఆ క్రమంలోని మధ్య సంఖ్య అవుతుందా?

నాన్న: చేసి చూడండి.

$$రవి : \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\frac{1+8+15+22+29}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

అవును. అన్నయ్య చెప్పినట్టే ఉంది.

నాన్న: ఒక క్రమం చూపితే ఆ క్రమంలోని అంకెల మొత్తం చెప్పగలను.

సుధ : రెండవ అడ్డవరుస

మధు : 77 అవునా?

రవి : నాకూ అర్థమైంది. 7 సంఖ్యల సగటు 11 కాబట్టి 7 సంఖ్యల మొత్తం 11×7 అంటే 77. సరే నాల్గవ నిలువు వరుసలో అంకెల మొత్తం ఎంత?

నాన్న: మధ్య సంఖ్య లేదు కాని ఆ సంఖ్యల మొత్తం చెప్పగలను 58.

సుధ : $4+11+18+25=58$ ఎలా చెప్పగలిగాడు?

రవి : ఎలా వచ్చింది నాన్నా?

నాన్న: నాలుగు అంకెలున్నాయి అంటే సమ సంఖ్య. అలాంటి పరిస్థితిలో రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెలను (end terms) కూడాలి. $4+25=29$. దానిని అంకెల సంఖ్యలో సగంతో హెచ్చించాలి. ఇక్కడ అంకెల సంఖ్యలో సగం అంటే $4 \times \frac{1}{2} = 2$. అంకెల మొత్తం $29 \times 2 = 58$.

సుధ : వరుసలో అంకెల సంఖ్య బేసి సంఖ్యలు (odd number) అయితే మధ్య సంఖ్య ఉంటుంది. అదే సమ సంఖ్య (even number) అయితే మధ్య సంఖ్య ఉండదు.

మధు : సంకలన క్రమంలో అంకెల సంఖ్యలు బేసి సంఖ్య అయితే మధ్య అంకె సగటు అవుతుంది. క్రమంలో ఎన్ని అంకెలున్నాయో దానితో హెచ్చిస్తే మొత్తం వస్తుంది.

కాని సంకలన క్రమంలో అంకెల సంఖ్య సమ సంఖ్య అయినప్పుడు

రవి : మధ్య అంకె ఉండదు. కాని అంకెల మొత్తం కోసం రెండు చివర్లనున్న అంకెలను కూడి, దానిని అంకెల సంఖ్యలో సగంతో హెచ్చిస్తేయాలి.

నాన్న: రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెలే తీసుకోవాలని ఏమీలేదు. ఇటు చివరి అంకె తరువాత ఉన్నదానినీ, అటు చివరకు ముందు ఉన్న దానినీ తీసుకొని కూడి చూడు.

రవి : 4, 11, 18, 25. ఈ క్రమంలో 4 తరువాత ఉన్న అంకె 11, 25కు ముందు ఉన్న అంకె 18. 11, 18 కూడితే 29 వచ్చింది. $4 + 25 = 29$. రెండూ ఒకటే.

నాన్న: సెభాష్. రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెలకు బదులు సమ స్థలంలో ఉన్న అంకెల (equally placed numbers) మొత్తం తీసుకోవచ్చు.

మధు: సమ స్థలంలో ఉన్న అంకెలు జత (pair) లవుతాయి.

ఉదా:- (4, 25) (11, 18)

జతలన్నీటి మొత్తం ఒకటే. జతల సంఖ్య అంకెల సంఖ్యలో సగం.

ఉదా: $2 = 4 \times \frac{1}{2}$ (4 సంఖ్యలు రెండు జతలవుతాయి). జత మొత్తాన్ని జతల సంఖ్యతో హెచ్చిస్తే అంకెల మొత్తం వస్తుంది.

నాన్న: చాలా చక్కగా చెప్పావు. గొప్ప గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన గాస్ (Gauss) కథ మీకు ఎప్పుడైనా చెప్పానా?

సుధ : లేదు. ఇప్పుడు చెప్పండి.

నాన్న: వినుండి. గాస్ మూడవ తరగతి చదువుతున్నప్పుటి సంగతి. ఉపాధ్యాయుడు తరగతిలో అందరినీ ఒకటి నుండి నూరు వరకు అంకెలు వేసి వాటి మొత్తం లెక్కగట్టమన్నాడు. మొదటగా పూర్తి చేసిన వాళ్ళు తమ పలకని ఉపాధ్యాయుని బల్ల మీద పెట్టాలి. ఈ లెక్కతో ఒక పిరియడ్ మొత్తం గడిచి పోతుందని ఉపాధ్యాయుడు అనుకున్నాడు. గాస్ అప్పటికే తనంతట తానే లెక్కల్లో ఎన్నో ప్రయోగాలు చేసేవాడు. ఒకటి నుండి వందవరకు అంకెల మొత్తం క్షణంలో ఎట్లా లెక్కగట్ట వచ్చో అతనికి తెలుసు. మొత్తం 5050 అని పలక మీద వేసి ఉపాధ్యాయుని బల్ల మీద పెట్టాడు.

రవి : 1 నుండి 100 వరకు అంకెలు రాశాడా?

నాన్న: లేదు.

సుధ : ఉపాధ్యాయునికి కోపం వచ్చి వుంటుందే!

నాన్న: అవును. కోపంవచ్చింది. కానీ అతని ఆశ్చర్యం కోపాన్ని అణచివేసింది చిటికలో సమాధానం ఎలా ఇవ్వగలిగావని గాస్ అడిగాడు.

రవి : సమ స్థానంలో ఉన్న సంఖ్యలను జతచేసి ఉంటాడు.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

ప్రతి జత మొత్తం 101

$$\text{మొత్తం జతలు } \frac{1}{2} \times 100 = 50$$

$$\text{కొబట్టి మొత్తం} = 101 \times 50 = 5050$$

మధు : ఇదంతా తానే చేశాడా?

నాన్న: అవును. గణిత శాస్త్రంలో తన ప్రతిభను చిన్నప్పుడే ఈ విధంగా కన బరిచాడు.

సుధ : అందుకే అతను అంత పెద్ద గణిత శాస్త్రజ్ఞుడయ్యాడు

మధు : సరి సంఖ్య అంకెల మొత్తం. బేసి సంఖ్యల అంకెల మొత్తం తెలుసు కోదానికి ఒకే సూత్రం లేదా?

నాన్న: మంచి ప్రశ్న అడిగావు. ఒకే సూత్రం కావాలంటే ఏం చేయాలో చూద్దాం. రెండవ అడ్డ వరుసలో ఉన్న అంకెల క్రమాన్ని రాసి, అదే క్రమాన్ని మరొకసారి పక్కనే రాయండి.

రవి : 8 9 10 11 12 13 14 8 9 10 11 12 13 14

నాన్న: సమ స్థానంలో వున్న అంకెలను జత చెయ్యండి

రవి : 8 9 10 11 12 13 14 8 9 10 11 12 13 14

నాన్న: ప్రతి జత మొత్తం ఎంత?

సుధ : 22.

నాన్న: ఎన్ని జతలు ఉన్నాయి?

రవి : 7.

నాన్న: 7 జతల మొత్తం ఎంత?

సుధ : $7 \times 22 = 154$.

కాని క్రమంలోని అంకెల మొత్తం 77 కదా?

మధు : అవును. కాని మనం క్రమంలోని అంకెలను రెండుసార్లు తీసుకున్నాం. కాబట్టి జతల మొత్తాన్ని సగం చెయ్యాలి.

సుధ : అలాగా! $\frac{1}{2} \times 154 = 77$.

ఇప్పుడు జవాబు సరిగా వచ్చింది.

నాన్న: మనం ఎన్నుకున్న క్రమంలో 8 మొదటి అంకె, 14 చివరి అంకె.

జత మొత్తం $= 8 + 14$ ఏడు అంకెలున్నాయి.

అన్ని అంకెల మొత్తం రెండుసార్లు తీసుకుంటే $= 7 \times (8 + 14)$.

కాని అన్ని అంకెలు ఒకసారి తీసుకుంటే వాటి మొత్తం $\frac{1}{2} \times 7 \times (8 + 14)$ అవుతుంది.

సూత్రం (formula) తయారు చేయడానికి మొదటి అంకెను 'a' అనీ చివరి అంకెను '1' అనీ అనుకుందాం. అంకెల సంఖ్య 'n' అనుకుందాం అప్పుడు సూత్రం ఎలా ఉంటుంది?

రవి : $\frac{1}{2} \times n(a+1)$

సరి సంఖ్య ఉన్న అంకెల మొత్తం మాడేమిటి?

మధు : దానికి ఇదే సూత్రం వర్తిస్తుంది. 4, 11, 18, 25 తీసుకుందాం.

మొందు చేసినట్లే చేస్తే 4 11 18 25 4 11 18 25

రవి : సమ స్థానం అంకెల మొత్తం 29. 4 జతలున్నాయి. నాలుగు జతల మొత్తం 4×29 . కాని మనకు దీని సగం కావాలి. కాబట్టి అంకెల మొత్తం $\frac{1}{2} \times 4 \times 29 = 58$. ఇది చాలాబాగుంది. కాని ఇంతకుముందు సరి సంఖ్యల క్రమానికి మరో పద్ధతి చెప్పారు. ఇప్పుడు రెండిటికీ ఒకే సూత్రమంటున్నారు.

నాన్న: ఒక సూత్రాన్నే ఇంతకుముందు రెండు విధాలుగా వివరించాను.

$\frac{1}{2} \times n \times (a+1)$ సూత్రం తీసుకోండి.

$n \times \frac{(a+1)}{2}$ అన్నా, $\frac{1}{2} \times n \times (a+1)$ అన్నా ఒకటే కదా!

మధు : ఓ! అలాగా! $\frac{a+1}{2}$ సగటు అవుతుందన్నమాట. బేసి సంఖ్య క్రమంలో

మధ్య సంఖ్య సగటు అవుతుంది. అంకెల సంఖ్య n అవుతుంది. అదే సరి సంఖ్య క్రమంలో $(a+1)$ రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెల మొత్తం, $\frac{1}{2} \times n$ జతల సంఖ్య అవుతాయి.

3. తమాషా దీర్ఘ చతురస్రాలు

నాన్న: ఏదైనా క్రమం మళ్ళీ మళ్ళీ వస్తుందే దానిని ఏమంటారు?

సుధ : క్రమ పద్ధతి (pattern)

నాన్న: సమానంగా ఉన్న చతురస్రాల (square) తో దీర్ఘ చతురస్రం (rectangle) ఎలా చేస్తారు?

సుధ : చూడండి నేను ఈ విధంగా చేశాను:

నాన్న: మంచిది. దీర్ఘచతురస్రాకార విన్యాసం (arrangement) లో ఒకటి, అంతకంటే ఎక్కువ అడ్డ వరుసల్లో అంతెలు ఉంటాయి. కాని ప్రతి అడ్డ వరుసలో అంతెలు సంఖ్య ఒకటే. దీనిని దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక (matrix) అంటారు.

సుధ : నేను అలాంటిది కాలెండరులో చూపిస్తాను.

2	3	4	5
9	10	11	12

నాన్న: ఈ దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక స్థాయి (order) 2×4 అంటే 2 అడ్డ వరుసలు 4 నిలువు వరుసలు ఉన్నాయి. దీనిల్లో ఉన్న తమాషా తెలిసిందా?

సుధ : ఆ! తెలిసింది!

$$2 + 12 = 14$$

$$3 + 11 = 14$$

$$4 + 10 = 14$$

$$5 + 9 = 14$$

ఇది ఒక తమాషా దీర్ఘచతురస్రం (magic rectangle) అన్నమాట! రవి : అయితే నేను ఇంకొకటి చెబుతున్నాను.

1	2	3
8	9	10
15	16	17
22	23	24
29	30	31

దీని స్థాయి 5×3 అవునా?

నాన్న: సెభాష్. దీనిలో తమాషా బోధపడిందా?

$$1 + 10 = 11$$

$$8 + 17 = 25$$

$$3 + 8 = 11$$

$$9 + 16 = 25$$

$$2 + 9 = 11$$

$$10 + 15 = 25$$

$$15 + 24 = 39$$

$$22 + 31 = 53$$

$$16 + 23 = 39$$

$$23 + 30 = 53$$

$$17 + 22 = 39$$

$$24 + 29 = 53$$

మధు : 11, 25, 39, 53 సంకలన క్రమమవుతుంది.

రవి : చతురస్రాకార విన్యాసం తీసుకొని దానిలో తమాషా ఉందేమో చూద్దామా?

5	6	7
12	13	14
19	20	21

నాన్న: చతురస్రమాత్రికను మరోసారి చూద్దాం

సుధ: నాకు పెద్ద దీర్ఘచతురస్రమాత్రిక కావాలి. ఇదేగో

2	3	4	5	6	7
9	10	11	12	13	14
16	17	18	19	20	21
23	24	25	26	27	28

నాన్న: దీని స్థాయి ఎంత?

సుధ: దీనిలో 4 అడ్డవరుసలు, 6 నిలువువరుసలు ఉన్నాయి.

నాన్న: అంటే 4×6 . సరే దీనిలో ఉన్న తమాషా మాకు చెప్పు చూద్దాం!

సుధ :	$2 + 28 = 30$	$9 + 21 = 30$
	$3 + 27 = 30$	$10 + 20 = 30$
	$4 + 26 = 30$	$11 + 19 = 30$
	$5 + 25 = 30$	$12 + 18 = 30$
	$6 + 24 = 30$	$13 + 17 = 30$
	$7 + 23 = 30$	$14 + 16 = 30$

మధు: దీని నుండి చిన్న చిన్న దీర్ఘచతురస్రమాత్రికలు తీసుకుంటే మరిన్ని తమాషాలు కనబడతాయి.

నాన్న: అవును. కానీ వీటిని ఇంతటితో వదిలేద్దాం.

4. అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రాలు

మధు: ఇప్పుడు మనం చతురస్ర వివ్యాసం, దానిలో ఉన్న తమాషాలు చూద్దాం.

నాన్న: మొదట సుధ వంతు.

రవి: ఏ స్థాయి తీసుకోమంటావు నాన్నా?

నాన్న: రెండవ స్థాయితో మొదలు పెడదాం.

సుధ :	1	2	3	4
	8	9	10	11

సరిగ్గానే వేశావా?

రవి: సరిగ్గానే వేశావు.

10	11	20	21
17	18	27	28

కూడా తీసుకోవచ్చు.

నాన్న: అవును. మరి వీటిలో ఉన్న తమాషా ఏమిటి?

సుధ :	$1 + 9 = 10$	$3 + 11 = 14$	$10 + 18 = 28$
	$2 + 8 = 10$	$4 + 10 = 14$	$11 + 17 = 28$
	$20 + 28 = 48$		
	$21 + 27 = 48$		

మధు: వికర్ణం మొత్తం సమంగా ఉంది. 3వ స్థాయి చతురస్ర మాత్రిక తీసుకుంటే ఏమవుతుంది?

రవి : ఇదుగో

1	2	3
8	9	10
15	16	17

వికర్ణాల మొత్తం

$$1 + 9 + 17 = 27$$

$$3 + 9 + 15 = 27$$

నాన్న : మధ్య అడ్డ వరుస మాచేమిటి?

$$8 + 9 + 10 = 27$$

మధ్య నిలువు వరుస మొత్తం $2 + 9 + 16 = 27$. అంటే మధ్య నిలువు వరుస, మధ్య అడ్డ వరుస, వికర్ణాల మొత్తం ఒకటే.

మరి 1 వ, 3వ నిలువు వరుసల మొత్తం కూడా 27 అవుతుందా?

నాన్న : అలా అయితే అది పూర్తి తమాషా చతురస్రం (complete magic square) అవుతుంది.

రవి : అలాలేదు. కాబట్టి, ఇది అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం (incomplete magic square) నాన్నా! నేను ఒక విషయం కనిపెట్టాను. మధ్య అంకెను 3 తో, అంటే చతురస్రం స్థాయిలో పెంచువేస్తే అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రంలో వచ్చే మొత్తం వస్తుంది.

మధు : ఇలా చేస్తే అన్ని సార్లు సరిగ్గా వస్తుందో లేదో చూద్దాం.

12	13	14
19	20	21
26	27	28

మధ్య అంకె 20. చతురస్రస్థాయి 3 కాబట్టి మొత్తం $20 \times 3 = 60$ వికర్ణాల మొత్తం

$$12 + 20 + 28 = 60, 14 + 20 + 26 = 60$$

సుధ : మధ్య అడ్డ వరుస మొత్తం

$$19 + 20 + 21 = 60$$

మధ్య నిలువు వరుస మొత్తం

$$13 + 20 + 27 = 60$$

మధు : ఇది చాలా విచిత్రంగా ఉండే. 4వ స్థాయి చతురస్రమాత్రిక తీసుకోవచ్చా!

నాన్న : తీసుకోవచ్చు. అయితే కాలెండరులో 4వ స్థాయి వరకే వెళ్ళగలమని గమనించండి. అంతకంటే ఎక్కువ స్థాయి చతురస్రం కావాలంటే 31 తరువాత కూడా అంకెలను వేసుకుంటూ పోవాలి. అలా వేసినా ఒక హద్దు ఉంది. అది ఏమిటో చెప్పగలరా?

రవి : అంకెలు ఎక్కడ ఆపుతారో తెలియకుండా ఎలా చెప్పగలం?

సుధ : కాలెండరులో నిలువు వరుసలు 7 ఉంటాయి, కాబట్టి 7వ స్థాయి చతురస్రం మించి పోలేం.

మధు : అద్భుతంగా ఉందికదా నాన్నా!

నాన్న : ఆవునవును. 4వ స్థాయి చతురస్రం తీసుకొని దానిలో ఉన్న తమాషా కనిపెట్టండి.

రవి :

4	5	6	7
---	---	---	---

11	12	13	14
----	----	----	----

18	19	20	21
----	----	----	----

25	26	27	28
----	----	----	----

ఇది 4వ స్థాయి చతురస్ర మాత్రిక.

$$4 + 12 + 20 + 28 = 64$$

$$7 + 13 + 19 + 25 = 64$$

$$\text{మధు : } 5 + 6 + 26 + 27 = 64$$

$$11 + 14 + 18 + 21 = 64$$

$$12 + 13 + 19 + 20 = 64$$

$$4 + 7 + 25 + 28 = 64$$

నాన్న: మీరేం చేస్తున్నారో అర్థమయ్యిందా? ప్రతిదాండ్లోనూ 82 మొత్తంగాగల రెండు జతలను కూడుతున్నారు.

మధు : నిజమే తమాషా దీర్ఘచతురస్రంలో పూరక జత ఒక్కమారే తీసుకున్నాం.

రవి : సరే నాన్న! ఈ అంతెం స్థానాలు మార్చి ఒక పూర్తి తమాషా చతురస్రం చేయలేమా!

నాన్న: మంచి ప్రశ్న వేశావు. దీని గురించి మరోసారి చెప్పతాను. కానీ మీకు తెలుసుకోవాలని ఆత్రంగా ఉంటే మీరే ప్రయత్నించి చూడండి. మీరు ఒక మాట మరిచారు. 3 వ స్థాయి చతురస్రంలో తమాషా మొత్తం మధ్య అంతె 8 తో హెచ్చిస్తే వస్తుంది. 4 వ స్థాయి చతురస్రంలో తమాషా మొత్తం ఇదే విధంగా కనుక్కోగలమా?

మధు : మధ్య అంతె లేదుగా! వ్యతిరేక మూలల్లో ఉన్న అంతెం మొత్తాన్ని 2 తో హెచ్చిస్తే తమాషా మొత్తం వస్తుంది.

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$9 \quad 10 \quad 11 \quad 12$$

$$16 \quad 17 \quad 18 \quad 19$$

$$23 \quad 24 \quad 25 \quad 26$$

రవి : తమాషా మొత్తం :

$$(2 + 26) \times 2 = 56$$

సుధ : 6, 28 కూడి దానిని 2 తో హెచ్చిస్తేనా ఇదే వస్తుంది.

నాన్న: తమాషా మొత్తాన్ని కనుక్కోడానికి మరి కొన్ని విధానాలు కూడా ఉన్నాయి.

రవి : కాలెండరు లోంచి తీసుకున్న చతురస్రంలోని అన్నీ అంతెం మొత్తం కనుక్కోడానికి ఏమైనా పద్ధతి ఉందా?

నాన్న: ఏదైనా ఒక 3 వ స్థాయి చతురస్రమాత్రికలోని ఎడమవక్క పైమూలలో నున్న అంతె చెప్పితే నేను అన్నీ అంతెం మొత్తం చెబుతాను.

సుధ : నేను ఎన్నుకొన్న 3 వ స్థాయి చతురస్రమాత్రిక ఎడమవక్క పై మూల ఉన్న అంతె 12.

నాన్న: అన్నీ అంతెం మొత్తం 180.

సుధ: అవునో కాదో నన్ను చూడనివ్వండి.

12	13	14
19	20	21
26	27	28
57	60	63 = 180

సరిగ్గానే చెప్పాడు!

రవి: నాకు తెలిసిపోయింది. మధ్య అంతెను 8 తో హెచ్చిస్తే వస్తుంది.

సుధ: కానీ, నేను మధ్య అంతె ఇవ్వనే లేదు కదా!

రవి: అయితే, ఎడమ పై మూలలో ఉన్న అంతెను 8 కలపాలి. అంతేనా?

మధు: బాగా చెప్పావు. ఎడమ పై మూల అంతెను బదులు కుడి పై మూల అంతెను ఇస్తే దానికి 8 కలిపితే మధ్య అంతె వస్తుంది దీనిని 8 తో హెచ్చిస్తే అన్నీ అంతెం మొత్తం వస్తుంది.

నాన్న: అటలోని రహస్యాన్ని కనిపెట్టేశావు.

మధు: 4 వ స్థాయి చతురస్రంలోని ఎడమవక్క పై మూలలోని అంతెను ఇస్తే అన్నీ అంతెం మొత్తం చెప్పగలను.

సుధ: 4 వ స్థాయి చతురస్రంలో ఎడమ పై మూల ఉన్న అంతె 4

మధు: అయితే అన్నీ అంతెం మొత్తం 256

సుధ: నన్ను లెక్కపెట్టి చూడనీ.

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28
58	62	66	70

= 256

రవి: ఉండండి ఈసారి రహస్యాన్ని నేను కవిపెడలాను. మొదట 4 ఉన్న వికర్ణ మొత్తం తెలియాలి. 4 కి 8 వరుసగా మూడుసార్లు కలుపుకుంటూ పోతే 12, 20, 28 వికర్ణంలోని అంకెలు వస్తాయి. తరువాత 4, 28 కూడితే 32 వస్తుంది. దీనిని మొదట 2 తో హెచ్చవేస్తే వచ్చే సంఖ్య 64. దీనిని 4 తో హెచ్చవేస్తే అన్నీ అంకెల మొత్తం వస్తుంది.

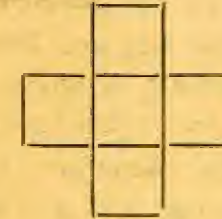
మధు: చాలా బాగా చెప్పావు.

5. కూడిక గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు

వాన్న: కాలెండరులో అంకెల విన్యాసం కూడిక గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు (cross puzzles) తయారు చేయటమే కాకుండా వాటిని ఎలా పరిష్కరించాలో తెలియపరుస్తుంది.

సుర: కూడిక గుర్తులో ఒక చిక్కు సమస్య ఇవ్వు. దానిని పరిష్కరిద్దాం.

వాన్న: ఇదిగో 3వ స్థాయి కూడిక గుర్తు సమస్య. నిలువు వరుస మొత్తం,



ఆడ్డ వరుస మొత్తం ఒకదే ఉండేలా గళ్ళను నింపాలి.

సుర: ఎన్నో సమాధానాలు ఉన్నాయి. నేను రెండు సమాధానాలు ఇస్తాను.

	3			13	
9	10	11		19	20
					21
	17				27

వాన్న: సెలాష్. ఇప్పుడు సమస్యను ఇంకో విధంగా ఇస్తాను. నిలువు (లేదా ఆడ్డ) వరుస మొత్తం 42. ఇప్పుడు 3వ స్థాయి కూడిక గుర్తు గళ్ళను పూర్తి చేయగలరా?

రవి : మొదట మర్కలో ఉన్న అంకెను కనుక్కోవాలి. అది $\frac{42}{3} = 14$.

14 నుండి 7 తీసివేస్తే వచ్చే అంకెనూ, 14 కు 7 కూడితే వచ్చే అంకెనూ నిలువు వరుసలో వ్రాసాకొందా నింపాలి. 14 నుండి 1 తీసివేస్తే వచ్చే అంకెనూ, 14 కు 1కలిపితే వచ్చే అంకెనూ అడ్డవరుసలో ఎడమ, కుడి వైపుల నింపాలి. సమారాసం వచ్చేసింది.

	7	
13	14	15
	21	

మరు కాలెండరులో ఉన్న విధంగా సమారాసం రావాలంటే 7, 1 ఉపయోగించాలి కాలెండరులో లేని సమారాసాలు కూడా సాదించవచ్చు. మొలాన్ని 3తో భాగించి మర్క అంకె వేయాలి. ఏదైనా ఒక అనుకూల మైన అంకెను, ఉదాహరణకు 3, తీసివేసి, కూడితే వచ్చే అంకెలను (11, 17) నిలువు వరుసలో వ్రాసాకొందా నింపాలి. అలాగే మరొక అనుకూలమైన అంకెను, ఉదాహరణకు 2, తీసివేసి, కూడితే వచ్చే అంకెలను (12, 16) అడ్డవరుసలో అటూ ఇటూ, వేసి పూర్తి చేయాలి.

	11	
12	14	16
	17	

రవి : కూడిక గుర్తుతో ఇంతకంటే పెద్ద స్థాయి సమస్యలు లేవా?

మరు : 3వ స్థాయి తరువాత 5వ స్థాయి కూడిక గుర్తు చిక్క సమస్య ఇలా ఉంటుంది.

మరు : కాలెండరు సహాయం లేకుండా ఈ సమస్యను పరిష్కరించలేను.

రవి : ఏం ఎందుకని? నాకు ఒక వరుసలోని మొత్తం కానీ మర్క అంకెను కానీ ఇవ్వు. నేను పరిష్కరిస్తాను.

మరు : సరే ఒక వరుస మొత్తం 55.

రవి : మర్కలో వున్న అంకె 11. వరుసగా రెండుసార్లు 3ను, 11 నుండి తీసి వేస్తే 8, 7 వస్తాయి. 11కు వరుసగా రెండుసార్లు 2 కూడితే 13, 15 వస్తాయి. ఈ అంకెలు నిలువు గడులలోకి వెళతాయి. 11 నుండి 3ను వరుసగా రెండుసార్లు తీసివేస్తే మనకు 8, 5 వస్తాయి. 3ను వరుసగా రెండుసార్లు కూడితే 14, 17 వస్తాయి, ఇవి అడ్డ వరుసల్లోకి వెళతాయి. కాబట్టి సమారాసం.

		7		
		9		
5	8	11	14	17
		13		
		15		

రవి : మరో విధంగా దీనికి సమాధానం చెప్పవచ్చు. 11 మధ్య అంతేగా 5 సంఖ్యలు గల రెండు సంకలన క్రమాలు తీసుకోవచ్చు.

నాన్న : ఇది చాలా బాగుంటుంది. ఇప్పుడు ఈ చిక్కు సమస్యను మరోవిధంగా చూద్దాం. వరుసగా (consecutive) ఉన్న 5 సంఖ్యలు, ఉదాహరణకు 25, 26, 27, 28, 29 ఉన్నాయి. వీటితో 3వ స్థాయి కూడిక గుర్తు చిక్కు సమస్యను ఎలా పరిష్కరిస్తావు?

రవి : 5 సంఖ్యలలో మధ్య సంఖ్య కూడిక గుర్తు మధ్యలో ఉండాలి. ఇదిగో సమాధానం.

		26		
25		27		29
		28		

మధు : సీపు చాలా తెలివైన వాడివే! నాకు మరో ఉపాయం తోచింది. వరుస అంతేలే అవసరం లేదు. సంకలన క్రమంలో ఉన్న అంతెంతో కూడా ఈ సమస్యను పరిష్కరించవచ్చు. ఉదాహరణకు 7, 11, 15, 19, 23 తీసుకో.

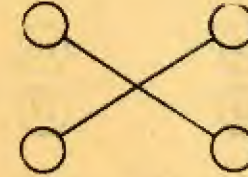
సుధ : నేను చేసి చూపిస్తాను.

		11		
7		15		23
		19		

నాకూ వచ్చింది.

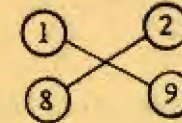
6. నక్షత్రపు గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు

నాన్న : మనం కూడిక గుర్తు చిక్కు సమస్యలు చూశాం. ఇప్పుడు నక్షత్రపు గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు (Star puzzles) చూద్దామా!



ఇది 2వ స్థాయి నక్షత్రపు చిక్కు సమస్య. రెండు వికర్ణం మొత్తం సమంగా ఉండేట్లు ఎలా సాధించాలి?

సుధ : కాలెండరు ఉపయోగిస్తే చాలా తేలిక.



ఈ వికర్ణం మొత్తం 10.

రవి : సీపు వికర్ణం మొత్తం చెబితే నేను నక్షత్రపు చిక్కు సమస్యను పూరించ గలను.

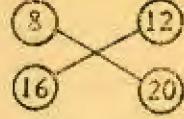
నాన్న : సరే! వికర్ణం మొత్తం 28.

రవి : 28 ను రెండు అంతెం మొత్తంగా రెండు విధాలుగా రాయాలి

$$28 = 20 + 8$$

$$28 = 12 + 16$$

కాబట్టి సమాధానం

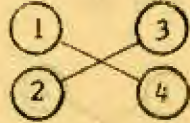


వాన్న: 29 కి 20, 8 పూరక జత (Complementary pair). అలాగే 12, 16. మీరు ఇష్టపడితే 'పూరక జత' అన్న పదాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.
సుధ: కానీ ఇవి కాలెండరులో ఉన్న సమాధానం కాదు. కాలెండరులో ఉన్న సమాధానం కోసం ఇలా చెయ్యవచ్చు.

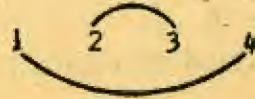


రవి: వరసగా వచ్చే నాలుగు అంకెలతో నక్షత్రపు సమస్యను పరిష్కరించ లేమా!

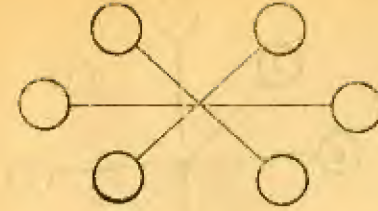
సుధ: నాకు అర్థమయ్యింది.



సమదూరంలో ఉన్న అంకెల జతలను టీసుకోవాలి.



మధు: చాలా బాగుంది. 8వ స్థాయి నక్షత్రపు చిక్కు సమస్యను టీసుకుంటే ఎలా పూర్తి చేస్తావు?

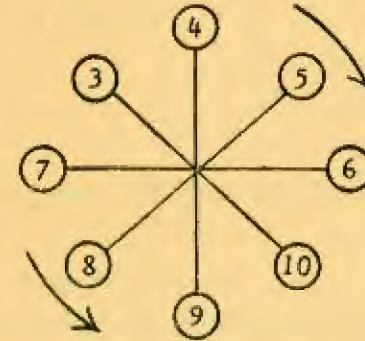


రవి: మరేం లేదు. 8వ స్థాయి అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రంలోని మధ్య అంకెను వదిలేసి మిగతావి నింపటమే.

మధు: నక్షత్రపు చిక్కు సమస్యలో ఎన్ని పూరక జతలన్నాయో అదే ఆ నక్షత్రపు సమస్య స్థాయి అని చెప్పవచ్చా నాన్నా?

వాన్న: అలా చెప్పవచ్చు. వరసగా 8 అంకెలు అంటే 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 టీసుకొని 4వ స్థాయి నక్షత్రపు సమస్యను పరిష్కరించండి.

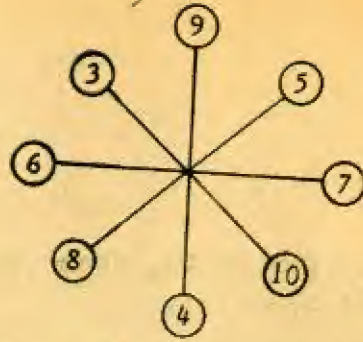
రవి: నాలుగు పూరకజతలు (3, 10) (4, 9) (5, 8) (6, 7) కాబట్టి నక్షత్రం ఇలా ఉంటుంది.



మధు: 3, 4, 5, 6, వరసగా ప్రదక్షిణ (clock-wise) దిశలోనూ 7, 8, 9, 10 వరసగా అప్రదక్షిణ (anti clock-wise) దిశలోనూ ఉన్నాయి.

వాన్న: ఇవి ఇలాగే ఉండాలా?

రవి: అవసరం లేదు. ఈ కింది విధంగా కూడా ఉండొచ్చు.



మధు: బాగుంది. కాని నాకు దీనికంటే ముందుదే నచ్చింది. ముందులాగా సంక
ంస క్రమంలో వున్న 8 అంకెలతో 4వ స్థాయి నక్షత్రపు చిక్కు సమ
స్యను పూరించవచ్చు.

7. పూర్తి తమాషా చతురస్రాలు

నాన్న: ఇంతకు ముందు రవి అడిగిన ప్రశ్నను చూద్దాం. చతురస్రంలో ఉన్న
అంకెలను మార్చి పూర్తి తమాషా చతురస్రం తయారు చేయవచ్చు.
సుధ : అద్ద పరుసల్లో, నిలుపుపరుసల్లో, వికల్పంలో అంకెల మొత్తం సమంగా
ఉండాలి కదూ!

నాన్న: అవును ప్రయత్నించి చూద్దాం.

రవి : అద్భుతంగా ఉంటుంది.

నాన్న: కాలెండరులోని 2వ స్థాయి చతురస్రంతో మొదలు పెడదాం.

సుధ : ఇదిగో 2వ స్థాయి చతురస్రం.

1	2
8	9

ఎంత ప్రయత్నించినా, నేను దీనిని పూర్తి తమాషా చతురస్రంగా
మార్చలేను.

రవి : సుధ చెప్పింది ముమ్మాటికీ నిజం.

నాన్న: ఇప్పుడు 3వ స్థాయి చతురస్రాన్ని చూద్దామా!

1	2	3
8	9	10
15	16	17

సుధ : నేను కూడి చూడనా?

$$8 + 9 + 10 = 27$$

$$2 + 9 + 16 = 27$$

$$17 + 9 + 1 = 27$$

$$3 + 9 + 15 = 27$$

రవి : చిటికెలో కూడేశావు.

సుర : నేను కూడనే లేదు. అంతేలు సంకలన క్రమంలో ఉన్నాయి కదా. కాబట్టి చిటి మొత్తం 3×9 అంటే 27.

రవి : రమాషా మొత్తం $9 \times 3 = 27$. అంతేలు మార్చి పూర్తి రమాషా చతురస్రంగా మార్చటం ఎలా? నాన్నా ఏదైనా చిన్న కిటుకు ఇవ్వండి.

నాన్న : కొంత సమయం తీసుకుని ప్రయత్నించి వివరమైనా పరవా లేదు. పూర్తి రమాషా చతురస్రంలో ఒక నిర్మాణ పద్ధతి ఉంది. ముందు దానిని గుర్తించాలి. 1, 2, 3 అంతేలు నుండి 8, 9, 10 అంతేలు ఎలా వస్తాయి?

సుర : 1, 2, 3 కు 7 కూడితే 8, 9, 10 వస్తాయి.

రవి : 1, 2, 3 కు 14 కూడితే చివరి అడ్డ వరుసలోని 15, 16, 17 వస్తాయి నాన్నా. బాగుంది. అయితే 1, 2, 3 నుండి 1, 2, 3 ఎలా వస్తాయి?

సుర : 1, 2, 3 కు నున్నా కలిపితే 1, 2, 3 వస్తాయి.

నాన్న : 1, 2, 3 తో ఒకటి, 0, 7, 14 తో మరొకటి చొప్పున రెండు చతురస్రాలు చెయ్యాలి. చిటిని అనుబంధ లేటిన్ చతురస్రాలు (auxiliary Latin square) అంటారు.

మదు : లేటిన్ చతురస్రం (Latin square) అంటే ఏమిటి నాన్నా?

నాన్న : అదే చెప్పబోతున్నాను. లేటిన్ చతురస్రంలో అనే అంతేలు ప్రతి అడ్డ వరుసా, నిలువు వరుసల్లో ఉపయోగించాలి. కానీ ఒకే అంతేలు రెండుసార్లు ఒకే వరుసలో ఉపయోగించకూడదు.

రవి : మరి వికర్ణంలో?

నాన్న : ఒకే అంతే వికర్ణంలో రెండుసార్లు వుండవచ్చు.

సుర : అడ్డ వరుసల, నిలువు వరుసల వికర్ణాల మొత్తాల సమంగా ఉండాలా!

నాన్న : లేదు! అడ్డ వరుసల మొత్తం, నిలువు వరుసల మొత్తం సమంగా ఉండే దాలు.

రవి : అయితే 2వ స్థాయి లేటిన్ చతురస్రం కూడా చేయవచ్చు. ఉదాహరణకు

1	2
2	1

సుర : ఇప్పుడు 1, 2, 3 తో లేటిన్ చతురస్రం చేద్దాం. 2 మధ్యగడిలో ఉండాలి.

1		
	2	
		3

1	3	2
3	2	1
2	1	3

నేను చెయ్యగలిగాను.

రవి : నేను 0, 7, 14 తో లేటిన్ చతురస్రం చేస్తాను.

0	14	7
14	7	0
7	0	14

సుర : అన్నయ్య కూడా నేను చేసినట్లే చేశాడు.

మదు : అవును. 1, 2, 3 లకు బదులు వాటి స్థానంలోనే 0, 7, 14 ఉపయోగించాడు. దీనిని "ప్రతిక్షేపణం" (replacement) అంటారు. దీనిని ఇలా చూపవచ్చు.

$$1 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 7$$

$$3 \rightarrow 14$$

నాన్న: బాగుంది. ప్రతిక్షేపణ గుర్తు →. సరే ఈ రెండు అనుబంధ లాటిన్ చతురస్రాలను కూడితే కొత్త చతురస్ర మాత్రిక వస్తుంది.

సుధ: నేను చేస్తాను.

1 + 0	3 + 14	2 + 7
3 + 14	2 + 7	1 + 0
2 + 7	1 + 0	3 + 14

అంటే :

1	17	9
17	9	1
9	1	17

రవి : ఇది మరో లాటిన్ చతురస్రం నాన్నా!

నాన్న: ఒకవేళ లాటిన్ చతురస్రంలో 0, 7, 14 లను మరో రకంగా అమర్చి ఆ తరువాత కూడితే!

మధు : నేను ప్రయత్నిస్తాను. 1, 2, 3 క్రమంగా ఎడమ ప్రక్క పైనుంచి కుడి ప్రక్క కిందకు ఉన్నాయి. 0, 7, 14 లను వికర్ణంలో కుడిపక్క పైనుంచి ఎడమప్రక్క కిందకి తీసుకుంటాను.

		0
	7	
14		

→

7	14	0
0	7	14
14	0	7

రవి : నేను వీటిని సంయుక్త చతురస్రంగా చేస్తాను.

1	3	2
3	2	1
2	1	3

+

7	14	0
0	7	14
14	0	7

=

8	17	2
3	9	15
16	1	10

కానీ ఇది లాటిన్ చతురస్రం కాదు. కాలెండరులో నుంచి మనం తీసు కున్న మూడవ స్థాయి చతురస్రంలోని సంఖ్యలే దీంట్లోనూ ఉన్నాయి. అయితే ఇది పూర్తి తమాషా చతురస్రమా కాదా?

సుధ : నిలువు వరుసల మొత్తం, అడ్డవరుసల మొత్తం లెక్కగట్టి చూస్తాను.

$$8 + 17 + 2 = 27$$

$$8 + 3 + 16 = 27$$

$$3 + 9 + 15 = 27$$

$$17 + 9 + 1 = 27$$

$$16 + 1 + 10 = 27$$

$$2 + 15 + 10 = 27$$

రవి : వికర్ణాల మొత్తం

$$8 + 9 + 10 = 27,$$

$$2 + 9 + 16 = 27$$

అహ! ఇది పూర్తి తమాషా చతురస్రం!

నాన్న: అంతేకాదు. దీంట్లో మరికొన్ని తమాషా లక్షణాలు ఉన్నాయి

సుధ : ఏమిటి నాన్నా!

నాన్న: అంతెం వర్గాలను (squares of numbers) వాటి గళ్ళలో వేయండి.

64	289	4
9	81	225
256	1	100

ఇప్పుడు ఇది తమాషా చతురస్రమేనా అని పరీక్షించాలి. పూర్తి తమాషా చతురస్రం అయితే కాదు కానీ దీనిలో కొన్ని ప్రత్యేక లక్షణాలు ఉన్నాయి.

64	289	4	357
9	81	225	
256	1	100	357
329	329		

వాన్న: దీనిలోని ప్రత్యేకత ఏమిటి?

మధు: మధ్య నిలువు వరుస మొత్తం, మధ్య అడ్డవరుస మొత్తం, వికర్ణాల మొత్తం సమంగా లేవు. అయితే అటూ ఇటూ ఉన్న నిలువు వరుసల మొత్తం పైనా కిందా ఉన్న అడ్డ వరుసల మొత్తం సమంగా ఉంది.

వాన్న: దీంతోనే మరో సమస్యకు సమాధానం ఉంది. గమనించారా? 8, 9, 18 అంకెల వర్గాల మొత్తం 2, 15, 10 అంకెల వర్గాల మొత్తం ఒకటే. అంటే వర్గాల మొత్తం ఒకటే ఉన్న మూడేసి సంఖ్యలను 2 ఇవ్వమన్నప్పుడు దీని ద్వారా కనుక్కోవచ్చన్న మాట.

రవి: ఠగేగా ఉండే!

మధు: 4వ స్థాయి అంపూర్ణ తమాషా చతురస్రంలో అంకెలను మార్చి ఒక పూర్తి తమాషా చతురస్రం చేయగలమా?

వాన్న: నిస్సందేహంగా మార్చవచ్చు.

మధు: చూడండి నాన్నా. ఇప్పుడు ఈ అంకెలకు తీసుకుందాం:

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

ఈ చతురస్రం నుంచి 1, 2, 3, 4 అనీ 0, 7, 14, 21 అనీ రెండు

అంకెల సమూహాలు వస్తాయి. ఈ సమూహాలను ఏమని అంటారు నాన్నా!

వాన్న: 1, 2, 3, 4 లను ఆధార అంకెలనీ (basic numbers) 0, 7, 14, 21 ని మూల అంకెలనీ (root numbers) అంటారు.

మధు: ఆధార అంకెలతో ఒక లాటిన్ చతురస్రం, ఆ తరువాత మూల అంకెలతో ఒక లాటిన్ చతురస్రం చేద్దాం.

సుర: కానీ మధ్య గడి లేదు కాబట్టి మధ్య అంకె ఉండదు. మఱి లాటిన్ చతురస్రం చేసేది ఎలా?

రవి: నేను ప్రయత్నించి చూస్తాను:

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

మధు: శభాష్! 0, 7, 14, 21 లతో లాటిన్ చతురస్రం నేను చేస్తాను. 4 కుడి పై నుంచి ఎడమ కిందికి వచ్చే వికర్ణంలో ఉంది. కాబట్టి 21 ఎడమ పై నుంచి కుడి కిందకి వచ్చే వికర్ణంలో ఉండాలి:

21			
	21		
		21	
			21

→

21	0	7	14
14	21	0	7
7	14	21	0
0	7	14	21

1, 2, 3, 4 పై అధ్యవసరలో ఉన్నాయి. కాబట్టి 0, 7, 14, 21 కింది అధ్యవసరలో ఉండాలి. నాకు వచ్చింది. రెండు లాటిన్ చతురస్రాలను గడుల వారీగా కూడాలి.

రవి : నేను చేస్తాను నాన్నా!

1+21	0+2	3+7	4+14		22	2	10	18
2+14	3+21	4+0	7+1		16	24	4	8
3+7	14+4	1+21	2+0	=	10	18	22	2
4+10	1+7	2+14	3+21		4	8	16	24

ఇది ఏం బాగాలేదు.

సుధ : అవును. ఒకే వికర్ణంలో 24 రెండు సార్లు వచ్చింది. అలాగే 18, 22 కూడా. వికర్ణాల అంతెం మొత్తం కూడా సమంగా లేదు. కాబట్టి ఇది అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం కూడా కాదు.

మధు : అయ్యో! మనకు లాటిన్ చతురస్రమైనా రాలేదు. ఇప్పుడు ఏదివారి? నాన్న : లాటిన్ చతురస్రాన్ని పలు విధాలుగా చెయ్యొచ్చు. 1, 2, 3, 4 అంతెంతో సరైన లాటిన్ చతురస్రం నేను చేస్తాను చూడండి:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

మధు : దీనిని బట్టి 1, 2, 3, 4 లకు బదులు 0, 7, 14, 21 లను ప్రతిక్షే

పించి రెండవ లాటిన్ చతురస్రం చేస్తాను. ప్రతిక్షేపణ ఈ విధంగా ఉంటుంది.

1 → 0

2 → 7

3 → 14

4 → 21

ఆ తరువాత రెండు చతురస్రాలను గడుల వారీ కూడాలి. అంతేనా?

రవి : నేను చేసి చూస్తాను:

1	2	3	4		0	7	14	21
3	4	1	2					
2	1	4	3	+				
4	3	2	1					

మధు : అగాగు. రెండవ లాటిన్ చతురస్రాన్ని మరోరకంగా చెయ్యాలి.

రవి : సరే మొదటి చతురస్ర మాత్రికలో అంతెంను మార్చి రెండవ చతురస్ర మాత్రికను మరో విధంగా అమర్చాం!

మధు : అంటే అదే ప్రతిక్షేపణ ఉపయోగిద్దామను కుంటున్నావా?

రవి : అవును,

1	3	2	4		0	14	7	21
2	4	1	3		7	21	0	14
3	1	4	2		14	0	21	7
4	2	3	1		21	7	14	0

మధు: బాగుంది. కానివ్వు.

రవి : ఇప్పుడు వీటి మొత్తం కనుక్కోవాలి.

1	2	3	4		0	14	7	21
3	4	1	2		7	21	0	14
2	1	4	3	+	14	0	21	7
4	3	2	1		21	7	14	0

సుధ: నేను చేస్తాను.

1	16	10	25
10	25	1	16
16	1	25	10
25	10	16	1

మధు: 1, 10, 16, 25 అంకెలతో లాటిన్ చతురస్రం అయితే వచ్చింది. ఇది పూర్తి తమాషా చతురస్రమే. కానీ కాలెండరులో నుంచి మనం తీసుకున్న నాల్గవ స్థాయి సంఖ్యలతో కాదు.

నాన్న: చూడండి పిల్లలూ! నేను మొదట ఇచ్చిన లాటిన్ చతురస్రాన్ని ముందు శ్రద్ధగా పరిశీలించండి.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

మధు: నాకు ఇప్పుడు అర్థమయ్యింది. తప్పో ఒప్పు చెప్పండి. ఈ చతురస్రాన్ని నాలుగుగా విభజిస్తే నాలుగు 2వ స్థాయి చతురస్రాలు వస్తాయి:

1	2	3	4	2	1	4	3
3	4	1	2	4	3	2	1

వీటిలో అన్ని వికర్ణాల మొత్తం 5. 1వ, 3వ చతురస్రాలు, 2వ 4వ చతురస్రాలు అద్దంలోని ప్రతిబింబాలా (images) ఉన్నాయి. పెద్ద చతురస్రంలో కేవల 1వ దాని కింద, 4వది 2వ దానికింద ఉన్నాయి. నాన్న: చాలా బాగుంది. ఇప్పుడు 0, 7, 14, 21తో లాటిన్ చతురస్రం ఎలా నిర్మించాలి?

రవి : వికర్ణాల మొత్తం సమంగా ఉండకూడదు. నిలువు వరుసల మొత్తం అద్దవరుసల మొత్తం సమంగా ఉండాలి. అంతేనా?

నాన్న: వికర్ణాల మొత్తం సమంగా రావాలంటే 1, 2, 3, 4 అంకెలలో పూరక జతలను ఎలా ఉపయోగించామో చూశారా?

మధు: అయితే 0, 7, 14, 21 లో పూరక జతల్ని తీసుకోవాలి. అవి (0, 21) (7, 14).

రవి : దీనితో నేను నాలుగు చిన్న చతురస్రాలను చెయ్యాలా?

0	21	7	14	21	0	14	7
21	0	14	7	0	21	7	14

నాన్న: బాగుంది. వీటిని ఉపయోగించి 4వ స్థాయి లాటిన్ చతురస్రాన్ని ఎలా నిర్మిస్తారు. మొదటి లాటిన్ చతురస్రంలో ప్రతిబింబ చతురస్రాలు ఒక దానికింద ఒకటి ఉన్నాయి.

మధు : కాబట్టి ఇప్పుడు ప్రతిబింబ చతురస్రాలను వికర్ణరీతిలో అమర్చాలి.

0	21
21	0

21	0
0	21

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

రవి : తెండు బాటిన్ చతురస్రాలను గడుం వారీగా నేను కూడుతాను.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

=

1	23	17	11
24	4	8	16
9	15	25	3
18	10	2	22

మమ : వాన్నా సారించగలిగాం.

సుర : నేను పరీక్షించి చూస్తాను.

$$1 + 4 + 25 + 22 = 52$$

$$11 + 8 + 15 + 18 = 52$$

$$1 + 23 + 17 + 11 = 52$$

$$24 + 4 + 8 + 16 = 52$$

$$9 + 15 + 25 + 3 = 52$$

$$18 + 10 + 2 + 22 = 52$$

$$1 + 24 + 9 + 18 = 52$$

$$23 + 4 + 15 + 10 = 52$$

$$17 + 8 + 25 + 2 = 52$$

$$11 + 10 + 3 + 22 = 52$$

అవును. నిజంగానే ఇది ఒక పూర్తి తమాషా చతురస్రమే!

మమ : వాన్నా! నాదో సందేహం. కాలెండరులో మూం సంఖ్యలు 0, 7, 14, లేదా 0, 7, 14, 21. '0'తో మొదలుకొని ఇవి 7 అంకె గుణికాలు (Multiples) కాని మరో అంకె పక్షపాద గుణితాలతో తమాషా చతురస్రం చెయ్యగలమా?

రవి : అంటే మూం సంఖ్యలు 0, 8, 12, 18 లేదా 0, 4, 8, 12 మొదలైన వాటితోనా?

మమ : అవును.

వాన్న : ఎందుకీ సార్వకాల ప్రయత్నించి చూడండి.

సుర : నేను 1, 2, 3 అధార అంకెలూ 0, 4, 8 మూం అంకెలతో 8వ స్థాయి పూర్తి తమాషా చతురస్రం చేస్తాను.

రవి : నేను 1, 2, 3, 4 అధార అంకెలతోనూ, 0, 8, 12, 18 మూం అంకెలతోనూ 4వ స్థాయి పూర్తి తమాషా చతురస్రం చేస్తాను.

మమ : ఊ! కానివ్వండి.

సుద :

1	3	2		4	8	0		5	11	2
3	2	1	+	0	4	8	=	3	6	9
2	1	3		8	0	4		10	1	7

వాకు వచ్చింది!

1	2	3	4		0	18	12	6
3	4	1	2	+	18	0	6	12
2	1	4	3		6	12	18	0
4	3	2	1		12	6	0	18

1	20	15	10
21	4	7	14
8	13	22	3
16	9	2	19

నాకు కూడా వచ్చింది!

నాన్న : ఇక్కడ జాగ్రత్తగా పొడిచి చూస్తే విషయం ఒకటి ఉంది. మూల అంకెలలో 2వది ఆధార అంకెలలో చివరిదానికంటే చిన్నది కావడం. మరు : నాకు అర్థమైంది. లేకపోతే అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం కూడా సరిగా ఉండదు. చివ మూల అంకె కదపటి ఆధార అంకె కన్నా చిన్నదిగా ఉంటే 3వ స్థాయి చతురస్రం ఈ విధంగా ఉంటుంది.

1	2	3
3	4	5
5	6	7

దీంతో 1,2,3 ఆధార అంకెలు 0,2,4 మూల అంకెలు. రెండవ మూల అంకె (2) కదపటి ఆధార అంకె (3) కంటే చిన్నది.

రవి : రెండవ మూల అంకె కదపటి ఆధార అంకె ఒకటి అయితే అంకెల అమరిక అందంగా ఉంటుంది. ఈ విధంగా ఉంటే 4వ స్థాయి చతురస్ర మాత్రం చూద్దాం.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

మరు : వికర్ణంలో పూరక జతలోని అంకెల స్థానాన్ని మార్చి దీనిని పూర్తి తమాషా చతురస్రం ఎలా చెయ్యాలి తెలిసింది.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

ఇదే ప్రక్రియను ఉపయోగించి కాలెండరులోని అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రాన్ని పూర్తి తమాషా చతురస్రంగా మార్చగలమా?

నాన్న : ప్రయత్నించండి.

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

ఇది ఒక అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం. (1, 25), (9, 17), (4, 22), (10, 18) పూరక జతలు. ఏదీని తారుమారు చేస్తే ఈ కింది విధంగా ఉంటుంది.

25	2	3	22	52
8	17	16	11	52
15	10	9	18	52
4	23	24	1	52
52	52	52	52	52

సుధ : ఈ తమాషా చతురస్రంలోని అంకెల వర్గాలను వేసి చూద్దామా!
నాన్న : నేనూ అదే చెప్పి పోతున్నాను. చెయ్యండి.
రవి : నేను ఆ ప్రయత్నంలోనే ఉన్నాను.

625	4	9	484	1122
64	289	256	121	730
225	100	81	324	730
16	529	576	1	1122
856	930	922	922	930
856				996

సుధ : నాన్నా! ఇది 8×8 చతురస్ర మాత్రికలో వచ్చిన దానికన్నా చాలా తమాషాగా ఉంది!
మధు : ఓహో! ఒక సంఖ్యను నాలుగు అంకెల వర్గాల మొత్తంగా కేందు విధాలుగా రాయవచ్చన్న మాట!

రవి : నాన్నా! అంకెల ఘనాను (cube of number) తీసుకుంటే ఏమౌతుంది?

మధు : నేను చేస్తూనే ఉన్నాను. పాకెట్ కాలిక్యులేటర్ తో ఘనాలు కనుక్కుంటాను.

15625	8	27	10648	26308
512	4913	4096	1331	10852
3375	1000	729	5832	10936
64	12167	13824	1	26056
15808	19576	18088	18676	17812
				21268

సుధ : అబ్బే దీంట్లో తమాషా ఏం లేదు.
నాన్న : కొందర వదకు! ఇది ఒక సవాలుగా తీసుకొని పరిశోధించాలి.
రవి : నాకు ఒక ఆలోచన వచ్చింది. తమాషా చతురస్రాన్ని ఈ విధంగానే ఎందుకు చెయ్యాలి? మరో విధంగా చేయకూడదా?
నాన్న : అది మంచి ప్రశ్న. 2,24ను తారుమారు చేసి....
సుధ : అలాగే (3,28), (8,18), (15,11) లనుకూడా తారుమారు చెయ్యాలి.
రవి : ఇదుగో నే చేశాను!

1	24	23	4
18	9	10	15
11	16	17	8
22	3	2	25

సుర : ఇది పూర్తి తమాషా చతురస్రమేనా?

రవి : అయి ఉండాలి.

1	24	23	4	52
18	9	10	15	52
11	16	17	8	52
22	3	2	25	52
52	52	52	52	52

అవును! పూర్తి తమాషా చతురస్రమే!

నాన్న : వాదొక సంహా. మర్య నున్న నిలుపు వరుసలను రాదుమారు చేసి చూడండి!

రవి : వికర్ణాల మొత్తాన్ని చూత్రమే పరీక్షిస్తే చాలు.

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25
52			52

ఇది కూడా పూర్తి తమాషా చతురస్రమే!

సుర : వీటి మనాలను వేసి చూడమో నాన్నా?

నాన్న : చెయ్యండి.

మధు : అయినా దీనివల్లకూడా ప్రయోజనం ఉండదు.

నాన్న : నీవన్నది నిజం. మనకు కావలసిన విధంగా రావాలంటే ఒక కొత్త పద్ధతి ఉంది.

రవి : ఆదేమిటి నాన్నా?

నాన్న : మర్య బిందువుల చతురస్రం (mid-point square) చేయండి

రవి : ఈ విధంగానా?

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

నాన్న : అవును.

సుర : ఇప్పుడు దీంతో ఏమి చెయ్యాలి నాన్నా?

మధు : ఎదురెదురు తుకాలలో ఉన్న సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోవాలేమో

నాన్న : నీవు చాలా తెలివైన వాడివి. కానివ్వండి.

సుర : నేను వీటి వర్గాలతో మొత్తం లెక్కించి చూస్తాను.

రవి : నేను మనాల మొత్తం లెక్కగడతాను.

మధు : త్వరగా చేయండి

$$\text{సుర : } 18^2 + 23^2 + 3^2 + 8^2 = 926$$

$$24^2 + 15^2 + 11^2 + 2^2 = 926$$

$$\text{రవి : } 18^3 + 23^3 + 3^3 + 8^3 = 18538$$

$$24^3 + 15^3 + 11^3 + 2^3 = 18538$$

నాన్న : చూశారా! ఎంత గమ్మత్తు విషయాలు బయటపడ్డాయో! కాలెండరులోని 4×4 చతురస్రమాత్రికలో ఈ విధమైన రెండుదాట ఉన్నాయేమిటి చూడండి.

సుధ : నాన్న ఇది చూచండి.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

దీనిని 3 వ స్థాయి పూర్తి తమాషా చతురస్రంగా మార్చడం నాకు తెలుసు.

1, 5, 9 లను మధ్య నిలుపు వరుసలో. 3, 5, 7 లను మధ్య అడ్డ వరుసలో పీసుకోవాలి. 2, 5, 8 లను 4, 5, 6 వికర్ణాలలో కిందనుండి పైకి వేయాలి.

	1	
3	5	7
	9	

8	1	6
3	5	7
4	9	2

కాలెండర్ లోని 3 వ స్థాయి సంపూర్ణ తమాషా చతురస్రాన్ని సంపూర్ణ తమాషా చతురస్రంగా మార్చావా?

1	2	3
8	9	10
15	16	17

1, 9, 17 మధ్య నిలుపు వరుసలో 3, 9, 15 మధ్య అడ్డవరుసలో ఉంచాలి. 2, 9, 18 లను, 6, 9, 10 లను వికర్ణాలలో కింది నుంచి పైకి వేయాలి.

16	1	10	27
3	9	15	27
8	17	2	27
27	27	27	27

అహ! నాకూ పచ్చేసింది!

8. నిలుపు వరుసల మొత్తం ఆట

సుధ : "ఒక సంఖ్యను తంచుకో" లాంటి ఆటలు కాలెండరులో లేవా నాన్నా?

నాన్న : అలాంటి ఆటలూ ఉన్నాయి. జూలై నెలను తీసుకో :

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

మొదటి నిలుపు వరుసలో నుండి ఒక సంఖ్యను ఎన్నుకుని మనసులో ఉంచుకో. తరువాత 3 వ నిలుపు వరుసనుండి మరొక సంఖ్యను ఎన్నుకుని దానిని కూడా మనసులో పెట్టుకో. మనసులోనే రెండు సంఖ్యలను కూడు. ఎంత వచ్చిందో చెప్పుకు. ఒక నిమిషం ఆలోచించండి. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 32 కన్నా తక్కువ ఉండాలి. ఎందుకంటే మన కాలెండరులో ఆంకెలు 31 వరకే ఉన్నాయి కదా!

సుధ : సరే రెండు సంఖ్యల మొత్తం లెక్కగట్టాను.

నాన్న : నీవనుకున్న సంఖ్యల మొత్తం 4వ నిలుపు వరుసలో ఉంది.

సుధ : తమాషాగా ఉందే! నేను మొదటి నిలుపువరుస నుండి 8, 8 వ నిలుపు వరుస నుండి 17 తీసుకుని కూడాను, రెండింటి మొత్తం 25. ఇది 4 వ నిలుపు వరుసలో ఉంది. మీరు ఎలా కనుక్కున్నారు నాన్నా?

రవి : నాన్నా, నేను ఒక సంఖ్యను రెండవ నిలుపు వరుస నుండి మరొక సంఖ్యను 4 వ నిలుపు వరుస నుండి ఎన్నుకున్నాను. వాటి మొత్తం లెక్కగట్టాను.

నాన్న : సంఖ్యల మొత్తం 6 వ నిలుపు వరుసలో ఉంది.

రవి : అవును! నేను 2 వ నిలుపు వరుసనుండి 18, 4 వ నిలుపు వరుసనుండి 4 తీసుకున్నాను. వీటి మొత్తం 20 వచ్చింది. 6 వ నిలుపువరుసలో 20 ఉంది.

సుధ : ఒకే నిలుపు వరుస నుండి రెండు సంఖ్యలను తీసుకోకూడదా?

నాన్న : రెండు సంఖ్యలనూ 4 వ నిలుపు వరుస నుండి తీసుకో. వాటి మొత్తాన్ని లెక్కగట్టు.

సుధ : అ! చేశాను.

నాన్న : వాటి మొత్తం మొదటి నిలుపు వరుసలో ఉంది.

సుధ : అవును! నేను 11, 18 ఎన్నుకున్నాను. వీటిని కూడితే 29 వస్తుంది. ఇది 1 వ నిలుపు వరుసలో ఉంది.

అ! నాకు అర్థమైంది.

$4 + 4 = 8$. 8 మొదటి నిలుపు వరుసలో ఉంది.

మధు : నాకో సందేహం! 1 వ నిలుపు వరుస నుండి 22, 3 వ నిలుపు వరుస నుండి 10 తీసుకుంటే మొత్తం 32 వచ్చింది. కానీ 32 కాలెండరులో లేదు కదా!

నాన్న : ఇలాంటిప్పుడు ఆంకెలను 31 తరువాత పొడిగించాలి.

మధు : అలా చేస్తే ఈ సంఖ్యల మొత్తం 4వ నిలుపు వరుసలో ఉంటుంది. నేను ఈ రహస్యాన్ని విప్పిచా! 1వ నిలుపు వరుస, 3వ నిలుపు వరుసల నుండి సంఖ్యలను ఎన్నుకున్నారనుకోండి. 1 కి 3 ని కలిపితే 4 కదా! అంటే సంఖ్యల మొత్తం 4వ నిలుపు వరుసలో ఉంటుందన్న మాట.

నాన్న : సరిగ్గా కనుక్కున్నావు!

మధు : నాకు మరొక సందేహం వుంది. 4వ నిలుపు వరుస నుండి 11, 8వ నిలుపు వరుస నుండి 20 ఎన్నుకున్నాను. వీటిని కూడితే 31 వస్తుంది.

నిలువు వరుసల సంఖ్యలు కూడితే 10 వస్తుంది. కానీ 10వ నిలువు వరుస లేదుగా!

రవి : 9వ నిలువు వరుసలో 8! ఉంది.

సుధ : 10 కూడా 9వ నిలువు వరుసలోనే ఉంది.

మధు : 10 వున్న నిలువు వరుస కోసం వెతక వచ్చు. కానీ వెతకకుండా చెప్పటం ఎట్లా?

నాన్న: నిలువు వరుసలో ఉన్న అంకెలకు, పై సంఖ్యతో సంబంధం ఉంది. అదేమిటో అలోచించి చెప్పతారా?

రవి : ఆ! నిలువు వరుసలో సంఖ్యలు సంకలన క్రమంలో ఉన్నాయి, ప్రతి సంఖ్య పైనున్న సంఖ్యకంటే 7 ఎక్కువ.

సుధ : కదపటి నిలువు వరుసలోని సంఖ్యలు 7 గుణిజాలు

మధు : నాకు అర్థమయ్యింది. 7 అంకె గుణిజాలకన్నా ఒకటి ఎక్కువ ఉన్న సంఖ్య వస్తే, సంఖ్యల మొత్తం 1వ నిలువు వరుసలో ఉంటుంది.

నాన్న: నిలువు వరుసల్లోని సంఖ్యలను 7తో భాగిస్తే శేషం వస్తుంది. ఈ శేషం ఆయా నిలువు వరుసలోని మొదటి సంఖ్య అవుతుంది.

సుధ : కానీ 4ను 7తో ఎలా భాగిస్తాము?

రవి : నాకు తెలుసు! 4ను 7తో భాగించలేం. కానీ శేషం నాలుగు.

$$\begin{array}{r} 0 \\ 7 \overline{) 4} \\ 0 \\ \hline 4 \end{array}$$

మధు : సరిగ్గా చేశావు.

రవి : కాబట్టి నిలువు వరుసల మొత్తం కనుక్కుకోవచ్చు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 శీలకమైన అంకెలు అవునా?

సుధ : 7ను 7తో భాగిస్తే శేషం '0' వస్తుంది. అప్పుడు ఎలా?

నాన్న: 0 తో మొదలు పెట్టి 7 నిలువు వరుసలలో అంకెలు వేసి చూడండి.

సుధ :	0	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27

ఇంకా ఇట్లాగే వేసుకుంటూ పోవచ్చు. కాలెండరులోని కదపటి నిలువు వరుస మొదటి నిలువు వరుస అయ్యింది. మిగిలిన నిలువు వరుసలన్నీ తరువాత స్థానానికి జరిగాయి.

నాన్న: 1వ నిలువు వరుసలోని సంఖ్యలను "శేషం శూన్యంగా గల సంఖ్యలు" లేక R_0 సంఖ్యలనీ, 2 వ నిలువు వరుసలో ఉన్న సంఖ్యలను శేషం 1 లేక R_1 సంఖ్యలనీ చెప్పవచ్చు. 0 తో మొదలుపెట్టి అంకెలను 8 నిలువు వరుసల్లో రాస్తే ఏమవుతుంది?

సుధ : నేను రాస్తాను.

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23

రవి : శేషం 0 ఉన్న సంఖ్యలు, శేషం 1 గల సంఖ్యలూ, ఇలా శేషం 5 గల సంఖ్యల దాకా వస్తుంది.

నాన్న: ఇప్పుడు ఏ సంఖ్యతో భాగించాలి?

సుధ : 8 తో.

నాన్న: సంఖ్యలను 8 నిలువు వరుసలుగా విభజిస్తే ఎన్ని శేష సంఖ్యలు (remainder number) ఉంటాయి? అవి ఏవి?

రవి : 8 ఉంటాయి అవి $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$.

నాన్న: ఒకే శేషం మిగులుతున్న ఈ సంఖ్యలన్నీ గాన్ "సమ శేష సంబంధం" (congruence relation) అని అంటారు. దీనికి అందమైన సంకేతం కూడా ఇచ్చారు.

$9 \equiv 28$ (మాపాంకము 7). దీనిని మాపాంకము (modulus)

7తో తొమ్మిది 28కు సమానం అని చదవాలి.

మరు : అంటే 9, 28 సంఖ్యలను, 7 తో భాగిస్తే మిగిలే శేషం సమానం.

రవి : 7, 28 ల మధ్య భేదం 14. $2 \times 7 = 14$. కాబట్టి 9, 28 ల మధ్య భేదం 7 గుణిం అని చెప్ప వచ్చుకదా!

నాన్న : అలా కూడా చెప్పవచ్చు. సమశేష సంబంధం సమానత సంబంధం (equality relation) లా ప్రవర్తిస్తుంది.

మరు : అంటే ఏమిటి?

నాన్న : $a = b$ అన్న సమానత సంబంధం చూస్తే,

$$a + c = b + c \text{ కదా!}$$

$$c = d \text{ అయితే } a + c = b + d \text{ అవుతా!}$$

ఈ విధంగానే సమశేష సంబంధంతోనూ చెయ్యవచ్చు.

మరు : నాకు అర్థమైంది. అలాగే 2 లోని నిలుపు వరుస నుండి $9 \equiv 28$ (మాపాంకము 7) తీసుకుందాం.

$$9 + 2 \equiv 28 + 2 \text{ (మాపాంకము 7) అవుతుంది కదా!}$$

8వ నిలుపు వరుస నుండి

$$10 \equiv 17 \text{ (మాపాంకము 7) తీసుకున్నాను.}$$

5వ నిలుపు వరుస నుండి

$$9 + 10 \equiv 28 + 17 \text{ (మాపాంకము 7) తీసుకోవచ్చు.}$$

అంటే ఇది మన నిలుపు వరుసల మొత్తం అటన్న మాట!

రవి : "నిలుపు వరుసల భేదం" అట లేదా!

నాన్న : ఆ అట కూడా అదొచ్చు. 5—8 ని ఎలా వివరిస్తావు?

రవి : '5 నుండి 8 ని తీసివేయాలి. లేదా —8ని 5 కు కూడాలి.

మరు : అవును తీసివేసినా లేక వ్యతిరేకాన్ని కూడినా ఒకటే!

నాన్న : కాబట్టి కూడితే తీసివేత పని కూడా చేయగలదు. అందుకే ప్రత్యేకంగా తీసివేయాలిని పని లేదు.

మరు : మరి నిలుపు వరుసల పౌచ్ఛవేత అట చూడేమిటి? రెండవ నిలుపు వరుస నుండి 9, 3వ నిలుపు వరుస నుండి 8 ఎన్నుకొని పౌచ్ఛవేస్తే

27 వస్తుంది. ఇది $2 \times 8 = 16$. కాబట్టి 6వ నిలుపు వరుసలో ఉండాలి. అట్లాగే ఉండే!

నాన్న : ఇప్పుడు సమానత సంబంధం $a = b$ తీసుకో.

$$ac = bc \text{ కదా! } c = d \text{ అయితే } ac = bd \text{ కదా!}$$

సమశేష సంబంధంలో కూడా ఇదే విధంగా ఉంటుందా?

మరు : ఖచ్చితంగా ఉంటుంది.

1వ నిలుపు వరుస నుండి

$$8 \equiv 15 \text{ (మాపాంకము 7)}$$

$$\text{ఇప్పుడు } 8 \times 2 \equiv 15 \times 2 \text{ (మాపాంకము 7) కరెక్ట్.}$$

2వ నిలుపు వరుస నుండి

$$2 \equiv 9 \text{ (మాపాంకము 7)}$$

$$\text{కాబట్టి } 8 \times 2 \equiv 15 \times 9 \text{ (మాపాంకము 7)}$$

$$\text{అంటే } 16 \equiv 135 \text{ (మాపాంకము 7) అవుతా?}$$

రవి : $135 - 16$ తీసివేస్తే అది ఏడు గుణిం కావాలి.

$$119 \equiv 17 \times 7, \text{ అవును సరిపోయింది.}$$

మరు : $a^2 \equiv b^2$, $a^3 \equiv b^3$ మొదలైనవి కూడా

సమశేష సంబంధాలకు ఉన్నాయి. అంటే

$$a^n \equiv b^n \text{ అనొచ్చు కదూ!}$$

నాన్న : అందుకు సందేహం లేదు.

మరు : భాగహారం మాట ఏమిటి? అంటే భిన్న సంఖ్యతో పాచ్చవేయడమే!

$$a = b \text{ అయితే}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \text{ అవుతుంది, } c = d \text{ అయితే } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

అవుతుంది. కాని c, d లు శూన్యం కాకూడదు.

$$\frac{1}{c} \times a = \frac{1}{c} \times b \text{ అనీ } \frac{1}{c} = \frac{1}{d} \text{ అయితే}$$

$$\frac{1}{c} \times a = \frac{1}{d} \times b \text{ అనీ చెప్పవచ్చును.}$$

నాన్న: సమశేష సంబంధంతో జాగ్రత్తగా ఉండాలి. అన్ని సార్లు భాగహారం చేయలేం. దీని గురించి మరోసారి వివరంగా తెలుసుకుందాం.

9. వారం, తేదీ !

సుధ : నాన్న ఏ తేదీనాడు ఏ వారం వస్తుందో తెలుసుకోడానికి కాలెండరు చూస్తాం. ఇలాంటివి కాలెండరు లేకుండా తెలుసుకోడానికి శేష సంఖ్యలు సహాయపడతాయా?

నాన్న: మంచి ప్రశ్న వేళావు. ఏదైనా ఒక తేదీకి వారం తెలిస్తే దాని ముందు లేదా తరువాత తేదీలు ఏ వారమో శేష సంఖ్యలతో కనిపెట్టవచ్చు. ముందులాగా జులై 1990 తీసుకుందాం.

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

8వ తేదీ ఏ వారం?

సుధ : మంగళ వారం.

నాన్న: 9కు 7 కలుపు.

సుధ : 10.

నాన్న: 10వ తేదీ ఏ వారం?

సుధ : మంగళవారం.

నాన్న : 7 కలుపుకున్నామంటే అర్థం ఏమిటి?

రవి : వారం మారదు.

నాన్న : సరే, 8 కలిపితే?

రవి : ఆ వారానికి ముందు రోజు.

నాన్న : 8 కలిపితే?

రవి : ఆ వారానికి మరుసటి రోజు.

నాన్న : 1 కలపటమంటే

సుధ : ఆ వారానికి మరుసటి రోజు

మధు : 8 కలిపినా, 1 కలిపినా, మరుసటి రోజే వస్తుంది. నాకు అర్థం అయ్యింది
8, 1 R_1 సంఖ్యలు.

రవి : దీంట్లోని క్రమపద్ధతి నాకు అర్థమైంది.

1 9 17 25. ఒకటికి 8 కలుపుకుంటూపోతే

ఈ సంఖ్యలు వస్తాయి. 1 ఆదివారం అందువల్ల 9 సోమవారం 17
మంగళవారం, 25 బుధవారం వస్తాయి.

సుధ : నేను మరో క్రమ పద్ధతిని కనుక్కున్నాను.

6 12 18 24 30.

8 కలుపుకుంటూ పోతే ఈ సంఖ్యలు వస్తాయి. 8 వ తేదీ శుక్రవారం
కాబట్టి 12 గురువారం, 18 బుధవారం, 24 మంగళవారం, 30
సోమవారం అవుతాయి.

మధు : దీన్ని 7తో భాగిస్తే శేష సంఖ్యలు 0, 5, 4, 3, 2 వస్తాయి అందుకే
వారాలు చెనక్కు తగ్గుతున్నాయి.

సుధ : చాలా సరదాగా ఉంది.

నాన్న : 9వ తేదీ ఏ వారం?

సుధ : సోమవారం.

నాన్న : 11 రోజుల తరువాత ఏ వారం?

సుధ : $9 + 11 = 20$, 20 వ తేదీ శుక్రవారం.

రవి : శేష సంఖ్యలను బట్టి చూద్దాం. 9 అంటే శేషం 2 గా గల సంఖ్య

(మాపాంకము 7) 11 అంటే శేషం 4 గా గల సంఖ్య (మాపాంకము 7).

$9 + 11$, $2 + 4$ సర్వసమానం (congruent) $2 + 4 = 6$, 6వ

తేదీ శుక్రవారం కాబట్టి 20వ తేదీ శుక్రవారం

మధు : జులై 15 ఆదివారం. 15 R_1 సంఖ్య. 28 రోజుల తరువాత ఏ
వారమవుతుంది.

సుధ : 28 అంటే శేషం 2 గా గల సంఖ్య. 1, 2 కూడితే 3. శేషం 3 వున్న
సంఖ్యలు మంగళవారం అవుతాయి.

రవి : నేను కాలెండరులో చూస్తాను. జులై 15 తరువాత 28 రోజులంటే

$$15 + 28 = 43$$

$$31 + 7 = 38 \quad (\text{ఆగస్టు 7})$$

ఆగస్టు 7వ తేదీ మంగళవారమే. కాబట్టి జవాబు సరిగ్గానే ఉండే.

మధు : అంటే జులై నెంతో ఆ సంవత్సరంలో ఏ తేదీకైనా వారం చెప్పగలం.
అవునా?

నాన్న : ఆ సంవత్సరంలోనే కాదు ఏ సంవత్సరంలోని ఏ తేదీకైనా వారం
చెప్పవచ్చు. కానీ దీనికి "గ్రెగోరియన్" (Gregorian) కాలెండరు
కాలి. మీకు జూలియన్ (Julian) గ్రెగోరియన్ కాలెండర్లు
గుర్తున్నాయా?

రవి : ఇంతకు ముందు మీరు చెప్పారు. గుర్తున్నాయి. కానీ వాదొక ప్రశ్న.
జులై నెల ఎందుకు తీసుకోవాలి నాన్నా? ఏ నెల అయినా తీసుకుని ఏ
తేదీకైనా వారం చెప్పలేమా?

నాన్న : కొన్ని సార్లు వెనక్కి వెళ్ళాలి వస్తుంది. ఒక శేష సంఖ్యను, మరో శేష
సంఖ్య నుండి తీసివెయ్యవచ్చు. కాబట్టి రవి అడిగినట్లు చెయ్యవచ్చు.
ఒక ఉదాహరణను చూద్దాం.

సుధ : జూన్ 17 ఆదివారం 11 రోజులు ముందు ఏ వారం అవుతుంది?

$17 - 11 = 6$. 6వ తేదీ బుధవారం. కానీ దీనిని శేష సంఖ్యలతో
చెయ్యాలి. 17 శేషం 3, 11 శేషం 4. ఇప్పుడు 3-4 కనుక్కోవాలి.
3, 10 సర్వ సమానం. కాబట్టి 3-4కు ఐదులు 10-4 కనుక్కోవచ్చు.

ఇది 8. 8వ తేదీ బుధవారం కాబట్టి సరిగ్గానే వుండికదా!

రవి : మార్చి 8 వ తేదీ మంగళవారం. 40 రోజులు ముందు ఏ వారం అవుతుంది?

సుధ : 40 శేషం 5. $8-5=3$

మధు : మార్చి 1 వ తేదీ గురువారం. కాబట్టి మార్చి 8 వ తేదీకి 40 రోజుల ముందు గురువారం అవుతుంది, కానీ నెల మారతుంది.

సుధ : చెనక్కు తెక్కవెడుతూ పరిశీలించాలి.

మార్చి					గురు ఏప్రిల్				
8	5	4	3	2	1	28	27	26	25
	23	22	21	20	19	18	17	16	15
	13	12	11	10	9	8	7	6	5
గురు జనవరి					గురు				
	3	2	1	31	30	29	28	27	26

మార్చి 8 కు 40 రోజులు ముందు అంటే జనవరి 25. అవును గురు వారమే.

నాన్న: సరే 1-1-1991 ఏ వారం అవుతుంది?

రవి : 1-1-90 సోమవారం. 365 రోజుల తరువాత వచ్చేరోజు ఏ వారమో కనుక్కోవాలి? ఈ లెక్క చేసేటప్పుడు ఏపు సంవత్సరాంలో 366 రోజులుంటాయని గుర్తుంచుకోవాలి.

నాన్న: ఒక్క నిమిషం ఆగు. $365=52 R_1$ కాబట్టి 365 శేషం 1. 1 శేషం $1.1+1=2$ అంటే మంగళవారం. కాబట్టి 1-1-91 మంగళవారం

రవి : ఒక షణం ఆగు. కాలెండరుతో పోల్చి చూస్తాను. 31-12-1990 సోమవారం అంటే 1-1-91 మంగళవారం. సరిగ్గానే వచ్చిందే!

సుధ : ఇప్పుడు 1-1-89 ఏం వారమో చెప్తారా?

రవి : 1-1-90 సోమవారం. 365 రోజులకు ముందు ఏ వారమో కనుక్కోవాలి.

సుధ : $\frac{365}{7} = 52 R_1$

365 శేషం 1. కాబట్టి $1-1=0.0$ లేదా 7 అంటే ఆదివారం.

రవి : గోడ మీద ఉన్న కాలెండరుతో సరి పోలుస్తాను ఉండండి. ఆ! అవును. 1-1-89 ఆదివారమే!

మధు : శేష సంఖ్యల అద్భుతమైన లక్షణాలతో చిన్న కాలెండరును చెయ్యగలమా?

నాన్న: చెయ్యవచ్చు. పోస్టల్ కార్డ్ అంత చిన్న కాలెండరు చెయ్యగలం.

రవి : భలే భలే. ఎలా చెయ్యాలి? మాకు కొన్ని సూచనలు ఇవ్వండి.

నాన్న: అది అన్నీ తేలింను చూపాలి.

సుధ : అంటే 1 నుండి 31 వరకు

నాన్న: ప్రతి నెలలో ఎన్ని రోజులున్నాయో గుర్తుందా?

రవి : జనవరి	ఏప్రిల్	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్
31	28	31	30	31	30
లేదా 29					
జూలై	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిసెంబర్
31	31	30	31	30	31

నాన్న: తరువాత ప్రతినెలా 1 వ తేదీ ఏ వారమో నిర్ణయించాలి.

రవి : సరే. శేష సంఖ్యలు ఉపయోగించి కనిపెడతాను.

సుధ : అయితే జనవరి 90 కాగితం మాత్రం మీరు ఉంచుకొని మిగిలిన కాలెండరు కాగితాలు వాడు ఇవ్వండి. మీ సమాధానాలు సరైనవేనో కాదో పరీక్షిస్తాను.

రవి : జనవరి 1 వ తేదీ సోమవారం

ప్రైవరి 1 అంటే 81 రోజుల తరువాత, $81 = R_9$. కాబట్టి $1+8 = 4$, 4 గురువారం. ప్రైవరి 1 గురువారం.

సుధ : అవును.

రవి : మార్చి 1, 28 రోజుల తరువాత $28 = R_0$, $4+0=4$. 4 గురువారం. కాబట్టి మార్చి 1 వ తేదీ కూడా గురువారమే!

సుధ : అవును

రవి : 81 రోజుల తరువాత ఏప్రిల్ 1 వ తేదీ $81 = R_9$ కాబట్టి $4+8=7$ 7 ఆదివారం కాబట్టి ఏప్రిల్ 1 వ తేదీ ఆదివారం

సుధ : అవును.

రవి : మిగిలినవి కూడా లెక్కగట్టి చెబుతానుండు.

మే 1 మంగళవారం

జూన్ 1 శుక్రవారం

జూలై 1 ఆదివారం

ఆగస్టు 1 బుధవారం

సెప్టెంబరు 1 శనివారం

అక్టోబర్ 1 సోమవారం

నవంబర్ 1 గురువారం

డిసెంబర్ 1 శనివారం

సుధ : అన్నీ కరెక్ట్

మధు : జనవరి, అక్టోబరు లు సోమవారంతో, మే 1 మంగళవారంతో, ఆగస్టు 1 బుధవారం తో, ప్రైవరి, మార్చి, నవంబరు గురువారం తో జూన్, డిసెంబరు శుక్రవారం తో, సెప్టెంబర్, జూలై శనివారంతో ఏప్రిల్ ఆదివారం తో మొదలయ్యాయి.

నాన్న: జనవరి నెల 1, ప్రైవరి 2 అనుకుంటూ పోతే దీనిని ఈ కింది విధంగా రాయవచ్చు:

1, 10	సోమ
5	మంగళ
8	బుధ
2, 3, 11	గురు
6,	శుక్ర
9, 12	శని
4, 7	ఆది

జనవరిని మూత్రం యూసి మిగిలిన నెలల 1వ తేదీ ఏ వారమో చెప్పి నట్టు, జనవరి కాలెండరుతో సంక్షిప్త రూపంలో మిగిలిన నెలలకు కూడా కాలెండరు రాయవచ్చు. ఒక విధానం ఇదిగో :

జనవరి 1990

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

నెలలు	ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
1, 10	7	1	2	3	4	5	6
5	1	2	3	4	5	6	7
8	2	3	4	5	6	7	1
2, 3, 11	3	4	5	6	7	1	2
6	4	5	6	7	1	2	3
9, 12	5	6	7	1	2	3	4
4, 7	6	7	1	2	3	4	5

సుధ : ఉదాహరణకు 21-9-90 తేదీ తీసుకుందాం.

ఈ సంక్లిష్ట కాలెండరును ఉపయోగించి వారం కనుక్కోవడం ఎలా?

మధు : 9వ నెలకు సరిగా 21 వ తేదీకి చూస్తే 5 అంతే ఉంది. జనవరి లో 5 శుక్రవారం కాబట్టి 21-9-90 శుక్రవారం

రవి : నాకు ఏదైనా ఒక తేదీ ఇవ్వు వారం చెబుతా!

సుధ : 24-11-90

రవి : 24వ తారీఖుకూ, 11వ నెలకూ తిన్నగా చూస్తే 6 అంతే ఉంది. జనవరి లో 6 శనివారం. కాబట్టి 24-11-90 శనివారం.

సుధ : అవును !

మధు : మనం ఇంకా చిన్న కాలెండరును చెయ్యలేమా? వాకో మార్గం తట్టింది. జనవరి నెల శేష సంఖ్య రావాలంటే మిగిలిన నెలల శేష సంఖ్యలకు ఎంత కూడాలో మొదట తెలుసుకోవాలి.

1, 10 నెలలకు	0 లేదా 7 ను కలపాలి.
5 వ నెలకు	1 ని కలపాలి
8 వ నెలకు	2 ని కలపాలి
2, 8, 11 నెలలకు	3 ని కలపాలి
6 వ నెలకు	4 ని కలపాలి
9, 12 నెలలకు	5 ని కలపాలి
4, 7 నెలలకు	6 ని కలపాలి

రవి : దీనివల్ల లాభం ఏమిటి?

మధు : ముందులాగా జనవరి కాలెండరు తీసుకుని కింద శేష సంఖ్యలు ఆరోహణ (ascending) క్రమంలో ఉండేట్లు అన్ని నెలలు వేయాలి. ఇదుగో :

జనవరి 1990

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

నెలలు	1	5	8	2	8	9	4
	10			8		12	7
				11			

రవి : నాకు అదివ్వు. ఒక తేదీ చెప్పి, వారం చెబుతాను.

మధు : సరే, 12.8.90

రవి : $12 \equiv 5$, (మాపాంకము 7) $8 \rightarrow 3$, (నెల సంఖ్య ఉన్న నెలకు వరుసలోని పై సంఖ్య) $5 + 3 = 8$, $8 \equiv 1$

1 సోమవారం కాబట్టి మార్చి 12వ తేదీ సోమవారం. అవునా?

మధు : ఎలా చేయాలో నీకు వచ్చేసింది.

సుధ : నన్ను కూడా చెయ్యనివ్వండి.

రవి : 19.8.1990 ఏ వారం?

సుధ : $19 \equiv 5$; $8 \rightarrow 2$ $5 + 2 = 7$, $7 \equiv 0$.

7 ఆదివారం కాబట్టి ఆగస్టు 19 వ తేదీ ఆదివారం.

మధు : కాలెండరును ఇంకా చిన్నదిగా చెయ్యవచ్చనుకుంటాను. అన్ని తేదీలు ఉండాలి అవసరం ఏమిటి? మనకు కావలసింది తేదీకి శేష సంఖ్య.

రవి : నీవన్నది అర్థమైంది నేను వేసి చూపిస్తానుండు చిన్న కాగితం పైన దీనిని చెయ్య వచ్చు.

జనవరి 1990

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
0 లేదా 7	1	2	3	4	5	6
1	5	8	2	6	9	4
10			8		12	7
			11			

సుధ : చాలా బాగుంది. నాన్న. ప్రతి సంవత్సరం ఇలాంటి చిన్న కాలెండర్లను అచ్చువేయిస్తే మనం స్నేహితులకు బహుమతిగా ఇవ్వవచ్చు.

10. కొన్ని గణిత రూపాలు

నాన్న : 1, 2, 3, 4, 5, 6ల శేషాల సమితి (set) వారం, నిలుపు వరుసల మొత్తం వరుసల భేదం, వరుసల లబ్ధి (product) కనిపెట్టడంలో ఇది ఎంత ముఖ్యమైన పాత్ర వహించిందో చూశాం. ఇప్పుడు వీటి లక్షణాలను పరిశీలిద్దాం. మొదట సంకలన (కూడిక) పట్టిక (addition table) చూద్దాం.

రవి : దీనిని నేను తయారు చేస్తాను.

సుధ : కాలెండరు కావాలా?

రవి : అవసరం లేదు. ఇదిగో సంకలన పట్టిక.

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

సుధ : ఈ పట్టికలో వివిధమైన కూడికలు ఉన్నాయి.

$$\begin{array}{r|l} + & 5 \\ \hline 3 & \rightarrow 1 \end{array}$$

రవి : 3, 5 సాధారణ సంఖ్యలుగా భావించి కూడితే వాటి మొత్తం కాదు. కాని 3, 5 లను శేషాలుగా భావించే (7 తో భాగించే వచ్చే శేషాలు)
 $3 + 5 = 1$ అవుతుంది.

సుధ : ఓహో! అలాగా! 3 శేషం ఇచ్చే సంఖ్యనూ, 5 శేషం ఇచ్చే సంఖ్యనూ కూడితే వచ్చే సంఖ్య శేషం 1 గల సంఖ్య అవుతుంది.

రవి : ఒక ఉదాహరణ చెప్పగలవా?

సుధ : 7 గుణిజాలకు 3, 5 కూడాలి.

$14 + 3 = 17$, (R_3 సంఖ్య), $21 + 5 = 26$ (R_5 సంఖ్య)
 ఇప్పుడు $17 + 26 = 43$, $43 =$ శేషం 1 (మాపాంకము 7)
 (43 ను 7 తో భాగించినప్పుడు శేషం 1 గల సంఖ్య అని అంటారు)

మధు : సున్నా కూడా 7 గుణిజం. కాబట్టి దీనికి 3, 5 కూడి వీటిని 7 తో భాగించే శేషాలు 3, 5 వస్తాయి. 3, 5 మొత్తం 8; 8 శేషం 1 వచ్చే సంఖ్య.

సుధ : నాకు అర్థమైంది.

నాన్న : దీంట్లో ఇంతకన్నా అసక్తికరమైన విషయాలున్నాయి. 3 కు ఏ సంఖ్య కూడితే, మొత్తం సున్నా అవుతుంది?

రవి : అలాంటి పూర్ణ సంఖ్య (whole number) లేదు.

నాన్న : సంఖ్య సంఖ్య (integer) లలో?

రవి : నాకు తెలుసు అది-3 కదూ!

నాన్న : ఇప్పుడు శేషాల సమితిలో?

రవి : 3 కు ఏ సంఖ్యను కలిపితే సున్నా అవుతుంది? పట్టిక చూస్తే 4 అని ఉంది.

మధు : ఓహో! సంఖ్యల వ్యతిరేకాలు [opposite] కూడా పట్టికలోనే ఉన్నాయి కదూ!

నాన్న : అద్భుతంగా లేదూ! 0 తప్ప మిగిలిన ఏ సంఖ్యకూ వ్యతిరేక సంఖ్య ఉండదు. అందుకే సంఖ్య సంఖ్యల అవసరం ఏర్పడింది. కాని 2 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మాపాంకము గల శేషాల సమితిలో శేషాల వ్యతిరేకాలు శేషాలనుండి దొరుకుతాయి. మాపాంకము 7తో శేషాలనూ వాటి వాటి వ్యతిరేకాలనూ రాయు.

రవి : నేను రాస్తాను.

శేషాలు	0	1	2	3	4	5	6
వ్యతిరేకాలు	0	6	5	4	3	2	1

సున్నా తప్ప మిగిలినవి పూరకాలు (complements)

నాన్న : 0 నుండి 6 వరకు సంఖ్యల వర్గాలు తీసుకొని, వాటిని 7తో భాగించే వచ్చే శేషాలు రెక్కగట్టండి.

రవి : నేను వీటిని 7కు పూరక జతలుగా తీసుకుంటాను.

$$\begin{array}{l} 1^2 \equiv 1 \text{ (మాపాంకము 7)} \\ 6^2 \equiv 1 \text{ (మాపాంకము 7)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2^2 \equiv 4 \text{ (మాపాంకము 7)} \\ 5^2 \equiv 4 \text{ (మాపాంకము 7)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3^2 \equiv 2 \text{ (మాపాంకము 7)} \\ 4^2 \equiv 2 \text{ (మాపాంకము 7)} \end{array}$$

అశ్చర్యంగా ఉండే! పూరకాలు విడిపోలేదు.

మధు : 1, 2, 4 మాత్రమే శేషాలుగా వచ్చాయి.

నాన్న : 1, 2, 4 వీటిని వర్గాల శేషాలని (quadratic residues) అంటారు.

3, 5, 8 వీటిని వర్గావ అవశేషాలని (quadratic non-residues) అంటారు. ఇవి గాన్లో ఎంతో ఆసక్తిని రేకెత్తించాయి.

మధు : ప్రతి మాపాంశానికి కొన్ని వర్గావశేషాలూ, కొన్ని వర్గావ అవశేషాలూ ఉంటాయి.

వాన్న : అవును. ఇప్పుడు సంఖ్యల సమితిలో తీసివేతనూ, శేషాల (మాపాంశము 7) సమితిలో తీసివేతనూ పరిశీలిద్దాం. సంఖ్యల సమితిలో 2-5కు సమాధానం ఎంత?

రవి : దీనికి పూర్ణ సంఖ్యల సమితిలో జవాబు లేదు. సంఖ్యల సమితిలో అయితే $2-5 = -3$

వాన్న : శేషాల సమితి (మాపాంశము 7)లో 2-5 ఎంత?

మధు : 5కు ఎంత కూడితే మొత్తం 2 అవుతుంది? పట్టికలో చూస్తే 4 అని తెలుస్తుంది.

$$\begin{array}{r|l} + & 5 \\ \hline 4 & \downarrow \\ & 2 \end{array}$$

కాబట్టి శేషాల సమితిలో ఒక శేష సంఖ్య నుండి మరొక శేష సంఖ్యను తీసివేయవచ్చు. వచ్చే సమాధానం కూడా శేష సంఖ్యయే.

వాన్న : ఈ శేష సంఖ్యలలో మరొక విచిత్రమైన విషయం వుంది.

2, 4, 8 సాధారణ సంఖ్యలైతే,

$$8-4=2, \quad 4-2=2$$

2, 4, 8 శేష సంఖ్యలనుకో, సంకలన పట్టిక (మాపాంశము 7) చూసి వీటి మధ్యనున్న సంబంధాన్ని చూద్దాం.

రవి : $8-4=2$, $8-2=4$ అని వుంది.

మధు : అంతేకాదు. $4-8=5$ అనీ, $2-8=3$ అనీ ఉంది. ఇదేం బాగులేదు. ఎందుకంటే వీటివల్ల $8>4$, $4>8$ అనీ, $8>2$, $2>8$ అనీ అర్థం వస్తుంది.

వాన్న : అరోహణ లేదా అవరోహణ (descending) క్రమంలో శేషసంఖ్యలను

రాయలేమన్నది తెలిసిన విషయమే! అవశేషాల (residues) కూ శేష సంఖ్యలకూ క్రమ లక్షణాలు లేవు. ఇప్పుడు వీటి గుణన లక్షణాలను పరిశీలిద్దామా?

రవి : నేను గుణన పట్టిక (multiplication table) తయారుచేస్తాను.

సుధ : ఇప్పుడైతే కాలేందరు కావాలా?

రవి : కాలేందరు లేకుండానే పట్టిక రాయగలను. కానీ త్వరగా రాయాలంటే కాలేందరు కావాలి.

\times	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

ఇదిగో పట్టిక తయారైంది.

సుధ : నేను పరీక్షించాలా? శేష సంఖ్య 6 శేష సంఖ్య 4ను పోల్చుచేస్తే శేష సంఖ్య 3 వస్తుంది.

$$\text{శేషం } 6 \text{ ఉండే సంఖ్య} = 18$$

$$\text{శేషం } 4 \text{ ఉండే సంఖ్య} = 11$$

$$\text{వీటిని పోల్చుస్తే } 18 \times 11 = 148 \text{ వస్తుంది.}$$

$$\frac{148}{7} = 20, \text{ శేషం } 3.$$

కాబట్టి 148 శేషం 3 వచ్చే సంఖ్య

వాన్న : సంఖ్యల సమితిలో $3 \times \square = 5$ అన్న సమీకరణానికి (equation) సమాధానం లేదు. కానీ శేషాల సమితి (మాపాంశము 7) లో సమా

రానం ఉంది. అది ఏమిటి?

రవి : పద్ధతిలో $3 \times 4 = 5$ అని ఉంది. కాబట్టి సమాధానం 4.

మధు : వాకు తెలిసింది. పూర్ణ సంఖ్యలకు 1 భాజకంగా తీసుకుని వాటిని భిన్నాంశాలు (fraction numbers) గా పరిగణించాల్సిన అవసరం ఇక్కడ లేదు. పూర్ణ సంఖ్యలో సమితిలో మూడరి శేష సంఖ్యలను ఇంకో శేష సంఖ్య (0 తప్పించి) తో భాగహారం చేసి సమాధానం కనుక్కోవచ్చు.

నాన్న : మీకు ఆకరణీయ సంఖ్య (rational number) లు తెలుసు. పూర్ణాంశాలను, సున్నా తప్ప మిగిలిన పూర్ణాంశాలతో భాగిస్తే ఈ సంఖ్యలు వస్తాయి. మొదటి ఆకరణీయ సంఖ్య అనీ, కడపటి ఆకరణీయ సంఖ్య అనీ ఉండవు. కాబట్టి ఆకరణీయ సంఖ్యల సమితి అనంత (infinite) మైనది. చిత్రమైన విషయం ఏమిటంటే శేషాల సమితి (మాపాంకము 7) ప్రతిమిత (finite) సమితి. కాని ఇది ఒక అపరిమితమైన సమితిలా ప్రవర్తిస్తుంది. అంటే ఏటితో.....

రవి : కూడిక, తీసివేత, హేద్యవేత శేషం లేని భాగహారం చెయ్యవచ్చు.

సుధ : ఇది చాలా బాగుంది. ఒకే సమితిలో నాలుగు ప్రక్రియలనూ చేయగలిగితే ఆ సమితిని ఏమంటారు?

నాన్న : గణిత శాస్త్ర పరిభాషలో దీనిని క్షేత్రమని (field) అంటారు.

మధు : నాకొక సందేహం. చిన్న మాపాంకము తీసుకుంటే చిన్న సమితులు వస్తాయి కదా!

నాన్న : అవును అలా చిన్న సమితి కూడా చేయవచ్చు

మధు : మాపాంకము 2 శేషాల సమితిలో 0, 1 మాత్రమే ఉంటాయి.

సుధ : 0 నిలుపు వరుసల్లో అంకెలు రాస్తే ఏమవుతుంది?

నాన్న : రాసి చూడు '0' తో మొదలు పెట్టు.

సుధ : 0 నుండి 5

ఇదుగో :

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35.....

నాన్న : శేషామ్. శేష సంఖ్య లేవి?

సుధ : 0, 1, 2, 3, 4, 5

నాన్న : ఇప్పుడు చూడు. నేనొక సంఖ్య ఇస్తే అది ఏ నిలుపు వరుసలో ఉంటుందో చెప్పగలవా?

రవి : ఒక సంఖ్య ఇవ్వండి.

నాన్న : 113

రవి : $\frac{113}{8} = 18$, శేషం 5

మధు : అంటే $113 \equiv 5$ (మాపాంకము 8)

సుధ : 5 మొదటి సంఖ్యగా ఉన్న చివరి (8వ) నిలుపు వరుసలో 113 ఉంటుంది.

నాన్న : కాబట్టి ప్రతి సంఖ్యకూ ఏదో ఒక నిలుపు వరుసలో స్థానం ఉంటుంది. ఒప్పుకుంటావా?

రవి : ఒప్పుకుంటాను.

నాన్న : ఒకే సంఖ్య రెండు నిలుపు వరుసల్లో ఉంటుందా?

సుధ : ఉండదు.

మధు : ఇక్కడ 8 శేష సమితులున్నాయి. ఏ రెండింటిలోనూ సామాన్యసంఖ్య లేదు.

నాన్న : అవును. గణిత శాస్త్ర పరిభాషలో ఈ విధంగా రాయడాన్ని, విభాగ

మనీ (partitioning), ఉపసమితిని (subset) వియక్త ఉపసమితి (disjoint) అని అంటారు.

మధు : నాకు తెలిసింది. సంఖ్యలను కొన్ని నిలుపువరుసల్లో రాయడం వల్ల ఎన్ని విధికలాలు జరుగుతున్నాయి.

1. మాపాంకము నిర్ణయ మవుతుంది. ఎన్ని నిలుపు వరుసలు ఉన్నాయో మాపాంకము కూడా అంతే.
2. ఆ మాపాంకానికి పరిమిత శేషాల సమితి ఉంటుంది.
3. సంఖ్యల సమితి వియక్త ఉపసమితులుగా ఏర్పడుతుంది.

రవి : అంతేకాదు! నిలుపు వరుసల మొత్తం, నిలుపువరుసల శేషం, నిలుపు వరుసల లబ్ధాల ఆటలు ఆడుకోవచ్చు.

నాన్న : మాపాంకము 7 శేషాల సమితిలోలేదా 7 అంకగణితం (arithmetic) లో కూడిక, తీసివేత, హెచ్చవేత, శేషం లేని భాగహారం మొదలైనవి చెయ్యవచ్చని చూశాం. మాపాంకము 7 శేషాల సమితి ఒక శ్లేత్రం. ఇది వేరొక మాపాంకానికి కూడా పరిస్థితులలో లేదో చూద్దాం. ఇప్పుడు మాపాంకము 6 శేషాల సమితిని చూద్దాం.

రవి : శేషాలు 0, 1, 2, 3, 4, 5 కూడిక, హెచ్చవేతలకు పట్టిక తయారు చేయాలి కదూ!

మధు : కూడిక పట్టిక నేను వేస్తాను.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

రవి : ఇది మాపాంకము 7 కూడిక పట్టిక లాగానే ఉంది.

మధు : కాబట్టి కూడిక, తీసివేతకు సమాధానాలు చెప్పవచ్చు.

మధు : ఇప్పుడు హెచ్చవేత పట్టిక తయారు చేస్తాను.

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

రవి : ఇది మాపాంకము 7 గుణన పట్టికలాగా లేదు.

నాన్న : నీవు బాగానే గుర్తుపట్టావు. కొన్ని తేదాలను చెప్పగలవా?

మధు : $3 \times 2 = 0$; $3 \times 4 = 0$. ఇలాంటివి మాపాంకము 7 గుణన పట్టికలో లేవు. ఇలాంటి లబ్ధాలు సంఖ్యల సమితి, భిన్నాంశాల సమితి, పూర్ణాంశాల సమితి, ఆకరణీయ సంఖ్యల సమితి మొదలైన వాటిలో రావు. వీటిలో సున్నా కాకుండా రెండు సంఖ్యలను హెచ్చవేసినప్పుడు సున్నా రానేరదు. ఇంకోవిధంగా చెప్పాలంటే ఈ సమితుల్లో కూన్య్యానికి భాజకాలు (diviser) లేవు.

నాన్న : సరే! ఈ మాపాంకము 6 గుణన పట్టిక నుండి $2 \times \square = 4$ కు సమాధానం చెప్పగలరా?

రవి : దీనికి రెండు సమాధానాలున్నాయి.

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 5 = 4$$

కాబట్టి జవాబు 12 లేదా 5.

నాన్న : $3/4$ కనిపెట్టగలరా? అంటే $4 \times \square = 3$.

మధు : దానికి సమాధానం లేదు.

$$4 \times 0 = 0; 4 \times 1 = 4 \quad 4 \times 2 = 8$$

$$4 \times 3 = 12 \quad 4 \times 4 = 16 \quad 4 \times 5 = 20$$

కాబట్టి 4 లబ్ధంగా రావేరారు.

రవి : కాబట్టి మాపాంకము 4 సమితిలో ప్రతిసారి భాగహారం చెయ్యలేం.

నాన్న : నీవు తెలివైనవాడివే! మాపాంకము 4 శేషం సమితిలో కూడిక, తీసివేత పాచ్చవేత చెయ్యగలం. కానీ భాగహారం మాత్రం అన్నిసార్లు చెయ్యలేం.

మధు : కాబట్టి ఇది శ్రేత్రం కాదు.

నాన్న : అవును. నీవు సరిగ్గా చెప్పావు. దీనిని వలయమని (ring) అంటారు.

మధు : శేషం సమితి వలయమా శ్రేత్రమా అని ఎలా కనుక్కోగలం?

నాన్న : ఇది మంచి ప్రశ్న.

సుధ : కూడిక పట్టిక, గుణన పట్టిక రూపొందించి వలయమా, శ్రేత్రమా అని పరీక్షించవచ్చు.

రవి : గుణన పట్టిక చాలనుకొంటాను.

మధు : అవును. కానీ అది శ్రమతో కూడుకున్న పని.

రవి : నాకొక, సమాధానం తట్టింది. తేనీ సంఖ్యల మాపాంకము శ్రేత్రం, సరిసంఖ్యల మాపాంకము వలయమనుకుంటాను.

నాన్న : అది అంత తేలిక కాదు. మాపాంకము 4, మాపాంకము 6, మాపాంకము 8 లకు కూడిక పట్టిక గుణన పట్టికలు తయారు చేసి చూడండి.

మధు : ప్రతి మాపాంకానికీ రెండు పట్టికలూ తయారు చెయ్యాలా? గుణన పట్టిక చాలదా?

నాన్న : సరే ప్రయత్నించి చూడండి.

రవి : మొదట మాపాంకము 4 కి గుణన పట్టిక రూపొందిస్తాను.

సుధ : ఇంతలో మాపాంకము 4, మాపాంకము 6 లకు గుణన పట్టిక నేను తయారు చేస్తాను.

రవి : $\times 9$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

సుధ : $\times 4$	0	1	2	3	$\times 5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	1	0	1	2	3	4
2	0	2	0	2	2	0	2	4	1	3
3	0	3	2	1	3	0	3	1	4	2
					4	0	4	3	2	1

రవి : మాపాంకము 9 గుణన పట్టిక మాపాంకము 6 గుణన పట్టిక లాగే ఉంది. కాబట్టి నేను దీనిని వలయమని తప్పు.

సుధ : మాపాంకము 6 గుణన పట్టిక, మాపాంకము 7 గుణన పట్టిక మాదిరే ఉంది.

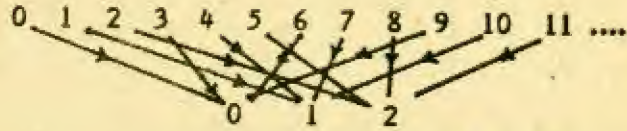
మధు : మాపాంకము 4, మాపాంకము 6, మాపాంకము 8 గుణన పట్టికలు ఒకరకం. మాపాంకము 5, మాపాంకము 7, గుణన పట్టికలు మరో రకం అవుతాయి. ఆ 1 నాకు తెలిసింది. 4, 6, 8 లు సంయుక్త సంఖ్యలు (composite number) వీటికి రెండుకన్నా ఎక్కువ కారణాంకాలు (factors) ఉంటాయి. కూడిక, పాచ్చవేతకు అభిజ్ఞ సంఖ్యల (primenumbers) శేష సమితి శ్రేత్రమూ, సంయుక్త సంఖ్యల శేష సమితి వలయమూ అవుతాయి.

నాన్న : ఒక గొప్ప విషయాన్ని కనిపెట్టావు. ఆసక్తికరమైన మరొక అంశం ఉంది. సంఖ్యలను ఒక క్రమంలో రాయండి. దీని కింద మాపాంకము 4 శేషాలను క్రమంలో రాయండి.

రవి : ఇదిగో

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10....
0 1 2

నాన్న: వీటిని 'ఒకే శేషం గల' అన్న సంబంధంతో జోడించండి.
సుధ : నేను చేస్తాను.



నాన్న: గణితశాస్త్రం పరిభాషలో పూర్వ సంఖ్యలను "ప్రదేశం" (domain) అనీ, శేషాలను "సహప్రదేశం" (co-domain) అనీ, ఈ రెండింటి మధ్య సంబంధాన్ని చూపే బాటాను "ప్రతిసర్వనం" (mapping) అనీ అంటారు.

మధు : 0, 3, 6, 9 0 వైపు ప్రతిసర్వించాయి.
1, 4, 7, 10 1 వైపు ప్రతిసర్వించాయి.
2, 5, 8, 11 2 వైపు ప్రతిసర్వించాయి.

నాన్న: ఇది ఏ రకమైన ప్రతిసర్వనము?

మధు : ఒక్కొక్క శేషం పై ఒకటి కన్నా ఎక్కువ పూర్వసంఖ్యలు ప్రతి సర్వించబడినాయి. శేషాలన్నీ ఉపయోగించబడినాయి. కాబట్టి ఇది 'ఎన్నో - ఒకటి, ప్రతిసర్వనం' [many-one, onto mapping] ఇది సాధారణమైన సంబంధం కాదు. ఇది ప్రమేయ సంబంధం. అవునా?

నాన్న: సరిగ్గా చెప్పావు. ఇప్పుడు సంఖ్యలకు 0, 1, 2 ప్రతిబింబాలు అనుకుంటే 5, 10 ల ప్రతిబింబాలు ఏవి?

రవి : 2, 1 వాటి ప్రతిబింబాలు.

నాన్న: (5+10) అంటే 15. దీని ప్రతిబింబం?

రవి : 0

సుధ : $0 = 2 + 1$

మధు : అంటే $2 + 1$ ప్రతిబింబం మొత్తం 0

మొత్తం యొక్క ప్రతిబింబం, ప్రతిబింబాల మొత్తం రెండుసమానమే.

రవి : లబ్ధాలకు కూడా ఇలాగే ఉంటుందా? ప్రయత్నించి చూద్దాం. 5, 10 ల ప్రతిబింబాలు 2, 1. $5 \times 10 = 50$. దీని ప్రతిబింబం 2, 1 ల లబ్ధం 2

మధు : కాబట్టి లబ్ధాల ప్రతిబింబం, ప్రతిబింబాల లబ్ధం కూడా ఒకటే.

నాన్న: ఈ రూపాంతర ప్రవర్తన (structural property) ను "సమరూపత" (homo morphism) అని గణిత శాస్త్రజ్ఞులు అంటారు. అలాగే సంఖ్యల మాపాంకము గుణన పట్టిక నుండి, సంఖ్యల విభజనమైన భాగహార లక్షణం బయట పడుతుంది.

మధు : ఏమిట?

నాన్న: ఉదాహరణకు మాపాంకము 5 గుణన పట్టికలో 0 ఉన్న నిలువు, అడ్డ వరుసలను తొలగించి చూడండి.

సుధ : ఇదుగో

$\times 5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

1, 2, 3, 4 ఉన్న లాటిన్ చతురస్రం వచ్చింది.

నాన్న: మాపాంకము 5 లో $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 1$, $3 \times 3 = 4$, $3 \times 4 = 2$ వచ్చాయి. వీటి అన్నింటినీ పొందవచ్చు.

రవి : $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times \dots \times 4 = 3 \times 1 \times 4 \times 2$ మాపాంకము 5.

మధు : దీన్ని ఇలా కూడా రాబోయ్యు.

$$3^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ (మాపాంకము 5)}$$

నాన్న: ఇంకేమైనా సంక్షిప్త పరచగలమా?

మరు: ఇది ఆధ్యా సంఖ్య మాపాంకము. కాబట్టి రెండువైపులా

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ తో భాగిస్తే,}$$

$$24 \equiv 1 \text{ (మాపాంకము 5) అని వస్తుంది.}$$

నాన్న: కాబట్టి $24 \equiv 1$ ఎంత?

$$రవి : 24 \equiv 1 \equiv 0 \text{ (మాపాంకము 5)}$$

నాన్న: అంటే ఆర్థం ఏమిటి?

మరు: $24 \equiv 1$ ని 5 తో భాగించవచ్చు.

నాన్న: మిగిలిన అర్థవరుసలు ఉపయోగిస్తే ఏమి వస్తుంది?

$$రవి : 14 \equiv 1 \text{ ని 5 తో భాగించవచ్చు.}$$

$$24 \equiv 1 \text{ ని 5 తో భాగించవచ్చు.}$$

$$44 \equiv 1 \text{ ని 5 తో భాగించవచ్చు.}$$

నాన్న: ఆధ్యా సంఖ్య అయిన 7 మాపాంకము గుణన పట్టిక నుండి ఏ విషయాలు తెలుస్తాయి?

$$1^0 \equiv 1 \text{ ని 7 తో భాగించవచ్చు.}$$

$$2^0 \equiv 1 \text{ ని 7 తో భాగించవచ్చు.}$$

$$3^0 \equiv 1 \text{ ని 7 తో భాగించవచ్చు.}$$

$$4^0 \equiv 1 \text{ ని 7 తో భాగించవచ్చు.}$$

$$5^0 \equiv 1 \text{ ని 7 తో భాగించవచ్చు.}$$

$$6^0 \equiv 1 \text{ ని 7 తో భాగించవచ్చు.}$$

$$కానీ 7 తో $7^0 \equiv 1$ భాగించలేం.$$

$$7 \text{ తో } 8^0 \equiv 1 \text{ భాగించగలమా?}$$

నాన్న: సమశేష సంబంధం ఉపయోగించి ఈ విషయం తెలుసుకోలేమా?

మరు: నేను ప్రయత్నిస్తాను. $8^0 \equiv 1$ (మాపాంకము 7) అని నిరూపించాలి కదూ?

నాన్న: అవును.

$$మరు : 8 \equiv 1 \text{ (మాపాంకము 7)}$$

$$కాబట్టి $8^0 \equiv 1^0$ (మాపాంకము 7)$$

$$అంటే $8^0 \equiv 1$ (మాపాంకము 7) అవునా?$$

నాన్న: $9^0 \equiv 1$ మాదేమిటి?

మరు: మొదట $9^0 \equiv 1 \equiv 0$ (మాపాంకము 7) కరక్తేనా అని చూడాలి,

$$సరే. $9 \equiv 2$ (మాపాంకము 7)$$

$$కాబట్టి $9^0 \equiv 2^0$ (మాపాంకము 7)$$

$$2^0 \equiv 1 \text{ ను 7తో భాగించవచ్చు. కాబట్టి } 9^0 \equiv 1 \text{ ను కూడా 7 తో భాగించవచ్చు.}$$

నాన్న: దీని బట్టి మనకు వచ్చే సంఖ్యల లక్షణం ఏమిటి?

మరు: ఏదైనా ఒక ఆధ్యా సంఖ్య, ఉదాహరణకు p ని తీసుకో. p గుణనం

కాని సంఖ్య n ను ఎన్నుకో. అప్పుడు $n \equiv 1$ ను p తో భాగించవచ్చు చక్కని విషయాన్ని కనుక్కున్నాం. దీన్ని మొట్టమొదటి సారి ఎవరు కనుగొన్నారు?

నాన్న: ఫెర్మా (fermot) అన్న ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు 17వ శతాబ్దంలో దీనిని కనిపెట్టాడు.

సరే! నేను దీనికి వెతుకున్నాను. 15 రోజులదాకా రాను. అంతలో మీరు కాలెండరులోని ఏ తేదీలైనా సరే వారం కనిపెట్టే విధానం గురించి ఆలోచించండి.

మరు: గ్రెగోరియన్ కాలెండరులోనా?

నాన్న: అవును. మనమిప్పుడు ఆ కాలెండరునే వాడుతున్నాం.

రవి : మీరు వచ్చేలోగా కనుక్కోడానికి ప్రయత్నిస్తాం.

సుధ : అంకగణితంలో ఎన్ని రకాలున్నాయి వాన్నా?

వాన్న : మీరు తెలుసుకున్న దాన్ని బట్టి అంకగణితం అనకూడదు. "అంక గణితాలు" అని అనాలి. మనకు ఎన్ని "అంకగణితాలు" కావాలి అన్ని ఆమర్చుకోవచ్చు.

మధు : కానీ క్షేత్రం, పరియం అవి రెండు రూపాలే ఉన్నాయి.

వాన్న : నీవు సరిగ్గా చెప్పావు.

సుధ : అబ్బ ఎన్ని విషయాలు నేర్చుకున్నామో!

రవి : ఈ కాలెండరులో చాలా సరదాగా సమయాన్ని గడిపాం.

మధు : అమ్మ బాబోయ్! కాలెండరులో ఇన్ని విషయాలు దాగున్నాయని ఇంతకు ముందు తిలకించలేదు.

పారిభాషిక పదజాలం

GLOSSARY

అకరణీయ సంఖ్య	Rational number
అంకగణితం	Arithmetic
అంకశ్రేణి	Arithmetic progression
అంతె/సంఖ్య	Number
అడ్డ పరుస (వరుస)	Row
అనంతం/అపరిమిత	Infinite
అనుబంధ లాటిన్ చతురస్రం	Auxiliary Latin square
అప్రదక్షిణ (అవసవ్య) దిశ	Anti-clock wise
అభిజ్య సంఖ్య	Prime number
అవరోహణ	Descending
అవశేషాలు	Residues
అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం	Incomplete magic square
ఆధార అంతె	Basic number
ఆరోహణ	Ascending
ఉపసమితి	Sub-set
ఎన్నో-ఒకటి, ప్రతిసర్వవం	Many-one, onto mapping
క్రమపద్ధతి	Pattern
క్రమం (వరుస)	Sequence
కారణాంకాలు	Factors
కాలెండరు (వందాంగం)	Calendar
కూడిక గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు	Cross puzzles
గణిత రూపాలు	Mathematical structures
గుణన పట్టిక	Multiplication table
గుణిజాలు	Multiples

ఘనం
చతురస్రం (చదరం
జత
తమాషా చతురస్రం
తమాషా దీర్ఘ చతురస్రం
దీర్ఘ చతురస్రం
నక్షత్రపు గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు
సిలుపు వరుస
పరిమిత
పూరకజత
పూరకాలు
పూర్ణ సంఖ్య/పూర్ణాంకం
పూర్తి తమాషా చతురస్రం
ప్రతిబింబం
ప్రతి స్థనం
ప్రతిక్షేపణం
ప్రదక్షిణ (సవ్య) దిశ
ప్రదేశం
ప్రమేయ సంబంధం
బేసి సంఖ్య
భాగభం
భాగహారం
భాజకం
భాజ్యం
భిన్నాంకం
మధ్య బిందువుల చతురస్రం

Cube (of a number)
Square
Pair
Magic square
Magic rectangle
Rectangle
Star puzzles
Column
Finite
Complementary pair
Complements
Whole number
Complete magic square
Image
Mapping
Replacement
clock wise
Domain
Functional relation
Odd number
Quotient
Division
Divisor
Dividend
Fraction number
Mid-point square

మాత్రిక
మాడ్యులము
మూల అంకె
రూపాంతర ప్రవర్తన
రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెలు
లబ్ధం
లాటిన్ చతురస్రం
వర్గం
వర్గావ అవశేషాలు
వర్గావశేషాలు
వరుసగా
వలయం
వ్యతిరేకాలు
వికర్ణం
విన్యాసం
విభాగం
వియక్త ఉపసఘితి
శేష సంఖ్య
సగటు (మధ్యమం)
సంకలన క్రమం
సంకలన పట్టిక
సంకేతం
సంజ్ఞా సంఖ్యలు
సమ రూపత
సమశేష సంబంధం
సమసంఖ్య
సమ స్థలంలో ఉన్న అంకెలు

Matrix
Modulus (mod)
Root number
Structural property
End terms
Product
Latin square
Square (of a number)
Quadratic non-residues
Quadratic residues
Consecutive
Ring
Opposite
Diagonal
Arrangement
Partitioning
Disjoint
Remainder number (R)
Mean
Additive sequence
Addition table
Notation
Integers
Homo morphism
Congruence relation
Even number
Equally placed numbers

సమానత సంబంధం

సమితి

సమీకరణ

సంయుక్త సంఖ్య

సర్వసమానం

సహప్రదేశం

స్థాయి (క్రమం, తరగతి)

సూత్రం

హెచ్చవేత/గుణకారం

క్షేత్రం

Equality relation

Set

Equation

Composite number

Congruent

Co-domain

Order

Formula

Multiplication

Field